CAPÍTULO

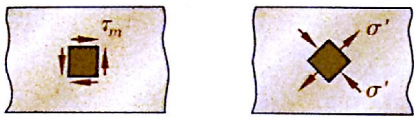
8 Esfuerzos principales bajo una carga dada

Debido a las fuerzas de gravedad y del viento, el poste que soporta el anuncio que se muestra está sometido en forma simultánea a compresión, flexión y torsión. En este capítulo usted aprenderá a determinar el esfuerzo que crean tales cargas combinadas en las estructuras y elementos de máquinas.

*8.1 INTRODUCCIÓN

a) *b)*

Figura 8.1



a) *b)*

Figura 8.2

La primera parte de este capítulo se dedicará a la aplicación de los conocimientos sobre la transformación de esfuerzos (adquiridos en el capítulo 7) al diseño de vigas y ejes. La segunda parte del capítulo tratará de cómo determinar los esfuerzos principales en elementos estructurales y de maquinaria sujetos a condiciones dadas de carga.

En el capítulo 5 se aprenderá a calcular el esfuerzo normal máximo σ_m que ocurre en una viga sometida a una carga transversal (figura 8.1*a*) y a verificar si dicho valor excede el esfuerzo permisible σ_{perm} para el material dado. Si fuera así, el diseño de la viga no sería aceptable. Si bien el peligro para un material frágil en realidad es fallar a la tensión, para un material dúctil es fallar a cortante (figura 8.1*b*). El hecho de que $\sigma_m > \sigma_{perm}$ indica que $|M|_{máx}$ es demasiado grande para la sección transversal seleccionada, pero no proporciona ninguna información acerca del mecanismo real de falla. En forma similar, el hecho de que $\tau_m > \tau_{perm}$ simplemente indica que $|V|_{máx}$ es demasiado grande para la sección transversal seleccionada. Mientras que el peligro para un material dúctil estriba en fallar ante un esfuerzo cortante (figura 8.2*a*), el peligro para un material frágil es fallar a la tensión bajo los esfuerzos principales (figura 8.2*b*). La distribución de los esfuerzos principales en una viga se analizará en la sección 8.2.

En función de la forma de la sección transversal de la viga y el valor de la cortante V en la sección crítica, donde $|M| = |M|_{máx}$, podría ocurrir que el mayor valor del esfuerzo normal no se diera en los extremos superior o inferior de la sección, sino en algún otro punto dentro de ésta. Como se verá en la sección 8.2, una combinación de valores grandes de σ_x y τ_{xy} cerca de la unión de la estructura y de los bordes de una viga en W o en S puede ocasionar que el valor del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ (figura 8.3) sea mayor que el valor σ_m en la superficie de la viga.

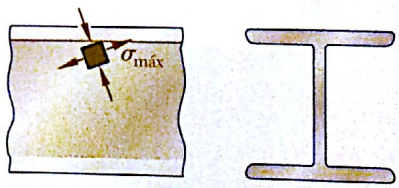


Figura 8.3

La sección 8.3 se dedicará al diseño de ejes de transmisión sometidos a cargas transversales y a pares de torsión. Se tomará en cuenta el efecto conjunto de los esfuerzos normales debidos a la flexión y a los esfuerzos cortantes debidos a la torsión.

En la sección 8.4 se aprenderá a determinar los esfuerzos en un punto K dado de un cuerpo de forma cualquiera sujeto a cargas combinadas. En primer lugar, se reducirá la carga dada a fuerzas y pares en la sección que contiene a K. Enseguida, se calcularán los esfuerzos normal y cortante en K. Por último, con el uso de uno de los métodos aprendidos en el capítulo 7 para transformar esfuerzos, se determinará los planos y esfuerzos principales, y el esfuerzo cortante máximo en K.

*8.2 ESFUERZOS PRINCIPALES EN UNA VIGA

Considere una viga prismática AB sometida a alguna carga arbitraria transversal (figura 8.4). Se denotarán con V y M al momento cortante y de flexión, respectivamente, en una sección que pase por un punto dado C. Se recordará, de los capítulos 5 y 6, que, dentro de un límite elástico, los esfuerzos que se ejercen sobre un pequeño elemento con caras perpendiculares a los ejes x y y, respectivamente, se reducen a los esfuerzos normales $\sigma_m = Mc/I$ si el elemento se encuentra en la superficie libre de la viga, y a los esfuerzos cortantes $\tau_m = VQ/It$ si el elemento está en la superficie neutral (figura 8.5).

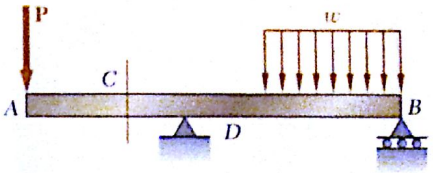


Figura 8.4

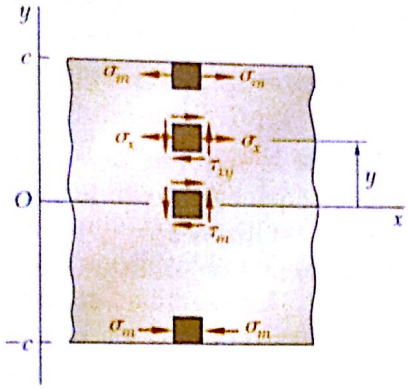


Figura 8.5

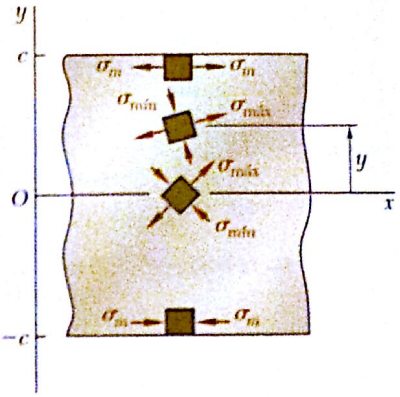


Figura 8.6

En cualquier punto de la sección transversal, un elemento de material está sujeto simultáneamente a los esfuerzos normales

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{8.1}$$

en donde y es la distancia a la superficie neutral e I el momento de inercia centroidal de la sección, y a los esfuerzos cortantes

$$\tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \tag{8.2}$$

donde Q es el primer momento sobre el eje neutral de la porción del área de la sección transversal localizada sobre el punto donde se calculan los esfuerzos, y t es el ancho de la sección transversal en ese punto. Con el uso de cualquiera de los métodos de análisis que se presentaron en el capítulo 7, es posible obtener los esfuerzos principales en cualquier punto de la sección transversal (figura 8.6).

Ahora procede formular la siguiente pregunta: ¿el esfuerzo normal máximo $\sigma_{máx}$ en algún punto dentro de la sección transversal podría ser mayor que el valor $\sigma_m = Mc/I$ calculado en la superficie de la viga? Si es así, entonces la determinación del mayor esfuerzo normal en la viga implicará una dificultad más grande que el cálculo de $|M|_{máx}$ y el uso de la ecuación (8.1). Se puede obtener una respuesta a dicha pregunta con la investigación de la

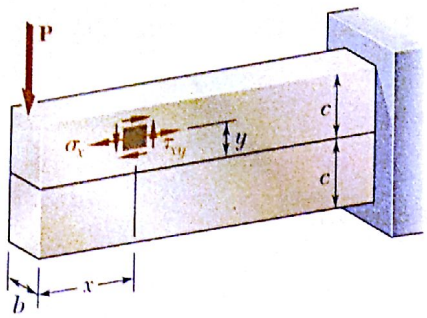


Figura 8.7

distribución de los esfuerzos principales en una viga rectangular a voladizo sometida a una carga **P** concentrada en su extremo libre (figura 8.7). Se recordará, de la sección 6.5, que los esfuerzos normal y cortante a una distancia x de la carga **P** y a una distancia sobre la superficie neutral, están dados, respectivamente, por las ecuaciones (6.13) y (6.12). Toda vez que el momento de inercia de la sección transversal es

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(bh)(2c)^2}{12} = \frac{Ac^2}{3}$$

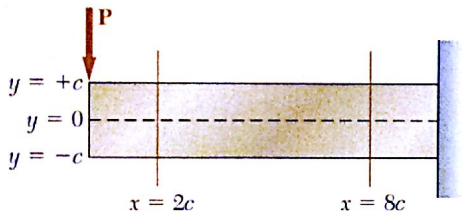
en donde A es el área de la sección transversal y c la mitad del peralte de la viga; se tiene que

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I} = \frac{Pxy}{\frac{1}{3}Ac^2} = 3\frac{P}{A}\frac{xy}{c^2} \tag{8.3}$$

y que

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{8.4}$$

Con el uso del método de la sección 7.3 o el de la 7.4, puede determinarse el valor de $\sigma_{máx}$ en cualquier punto de la viga. La figura 8.8 muestra los resultados del cálculo de las razones $\sigma_{máx}/\sigma_m$ y $\sigma_{mín}/\sigma_m$ en las dos secciones de la viga, correspondientes respectivamente a $x = 2c$ y a $x = 8c$. En



	$x = 2c$		$x = 8c$	
y/c	$\sigma_{mín}/\sigma_m$	$\sigma_{máx}/\sigma_m$	$\sigma_{mín}/\sigma_m$	$\sigma_{máx}/\sigma_m$
1.0	0	1.000	0	1.000
0.8	−0.010	0.810	−0.001	0.801
0.6	−0.040	0.640	−0.003	0.603
0.4	−0.090	0.490	−0.007	0.407
0.2	−0.160	0.360	−0.017	0.217
0	−0.250	0.250	−0.063	0.063
−0.2	−0.360	0.160	−0.217	0.017
−0.4	−0.490	0.090	−0.407	0.007
−0.6	−0.640	0.040	−0.603	0.003
−0.8	−0.810	0.010	−0.801	0.001
−1.0	−1.000	0	−1.000	0

Figura 8.8 Distribución de esfuerzos principales en dos secciones transversales de una viga en voladizo rectangular que soporta una carga concentrada única.

cada sección, estas razones se determinaron en 11 puntos diferentes, y se indica la orientación de los ejes principales en cada punto.†

Queda claro que $\sigma_{máx}$ no excede σ_m en ninguna de las dos secciones consideradas en la figura 8.8 y que, si excede a σ_m en algún caso, será en las secciones cercanas a la carga **P**, donde σ_m es pequeña en comparación con τ_m.‡ Pero, para secciones cercanas a la carga **P**, el principio de Saint-Venant no se aplica, y las ecuaciones (8.3) y (8.4) dejan de ser válidas, excepto en el caso muy improbable de una carga distribuida en forma parabólica sobre el extremo libre de la sección (*cf.* sección 6.5), y se requiere usar métodos más avanzados de análisis que tomen en cuenta el efecto de las concentraciones de esfuerzo. Por tanto, se concluye que, para vigas de sección transversal rectangular, y dentro del marco de la teoría presentada en este texto, el esfuerzo normal máximo puede obtenerse de la ecuación (8.1).

En la figura 8.8 se determinaron las direcciones de los ejes principales en 11 puntos en cada una de las dos secciones consideradas. Si este análisis se extendiera a un número mayor de secciones y a un número más grande de puntos en cada sección, sería posible dibujar dos sistemas ortogonales de curvas en el flanco de la viga (figura 8.9). Un sistema consistiría en curvas tangentes al eje principal que corresponde a $\sigma_{máx}$ y el otro en curvas tangentes al eje principal que es el de $\sigma_{mín}$. Las curvas así obtenidas se conocen como *trayectorias de esfuerzo*. Una trayectoria del primer tipo (líneas continuas) define en cada uno de sus puntos la dirección del esfuerzo mayor de tensión, mientras que una trayectoria del segundo tipo (líneas punteadas) define la dirección del mayor esfuerzo de compresión.§

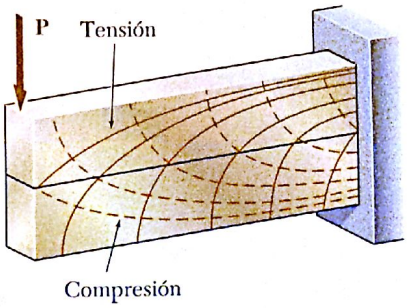


Figura 8.9. Trayectorias de esfuerzo.

La conclusión a la que se ha llegado para las vigas de sección transversal rectangular, acerca de que el esfuerzo normal máximo en la viga puede obtenerse a partir de la ecuación (8.1), sigue siendo válida para muchas de las vigas de sección transversal no rectangular. Sin embargo, cuando el ancho de la sección transversal varía en forma tal que los esfuerzos cortantes mayores τ_{xy} ocurrirán en los puntos cercanos a la superficie de la viga, en donde σ_x también es grande, y en dichos puntos puede que resulte un valor del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ mayor que σ_m. Se debe prestar especial atención sobre esta posibilidad cuando se seleccionen vigas W o vigas S, y se calculen los esfuerzos principales $\sigma_{máx}$ en las juntas b y d del alma con las alas de la viga (figura 8.10). Esto se hace determinando σ_x y τ_{xy} en ese punto con las ecuaciones (8.1) y (8.2), respectivamente, y con el uso de cualquiera de los métodos de análisis del capítulo 7 para obtener $\sigma_{máx}$ (véase problema modelo 8.1). Un procedimiento alternativo consiste en asignar a τ_{xy} el valor del esfuerzo cortante máximo en la sección, $\tau_{máx} = V/A_{malla}$, dado por la ecuación (6.11) de la sección 6.4. Esto lleva a un valor ligeramente mayor, y por tanto conservador, del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión de la malla con las pestañas de la viga (véase problema modelo 8.2).

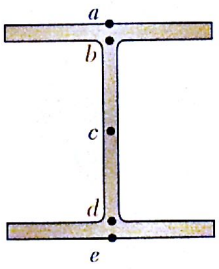


Figura 8.10

† Véase el problema 8.C2, que alude al programa utilizado para obtener los resultados que se muestran en la figura 8.8.

‡ Como se comprobará en el problema 8.C2, $\sigma_{máx}$ excede a σ_m si $x \leq 0.544c$.

§ Un material frágil, tal como el concreto, fallará a la tensión a lo largo de planos perpendiculares a las trayectorias del esfuerzo de tensión. Así, para ser efectivas, las barras de acero de refuerzo deben colocarse en forma tal que intersequen a dichos planos. Por otro lado, las varillas adheridas a la malla de una viga serán eficaces en la resistencia si intersecan planos perpendiculares a las trayectorias del esfuerzo de compresión.

*8.3 DISEÑO DE EJES DE TRANSMISIÓN

Cuando se analizó el diseño de ejes de transmisión en la sección 3.7, sólo se consideraron los esfuerzos debidos a los pares de torsión que se ejercían sobre los ejes. Sin embargo, si la fuerza se transfiere hacia el eje y desde él por medio de engranes o ruedas dentadas (figura 8.11*a*), las fuerzas ejercidas sobre los dientes de los engranes son equivalentes a sistemas de pares de fuerzas aplicados en los centros de las secciones transversales correspondientes (figura 8.11*b*). Esto significa que el eje está sometido a una carga transversal y a una carga de torsión.

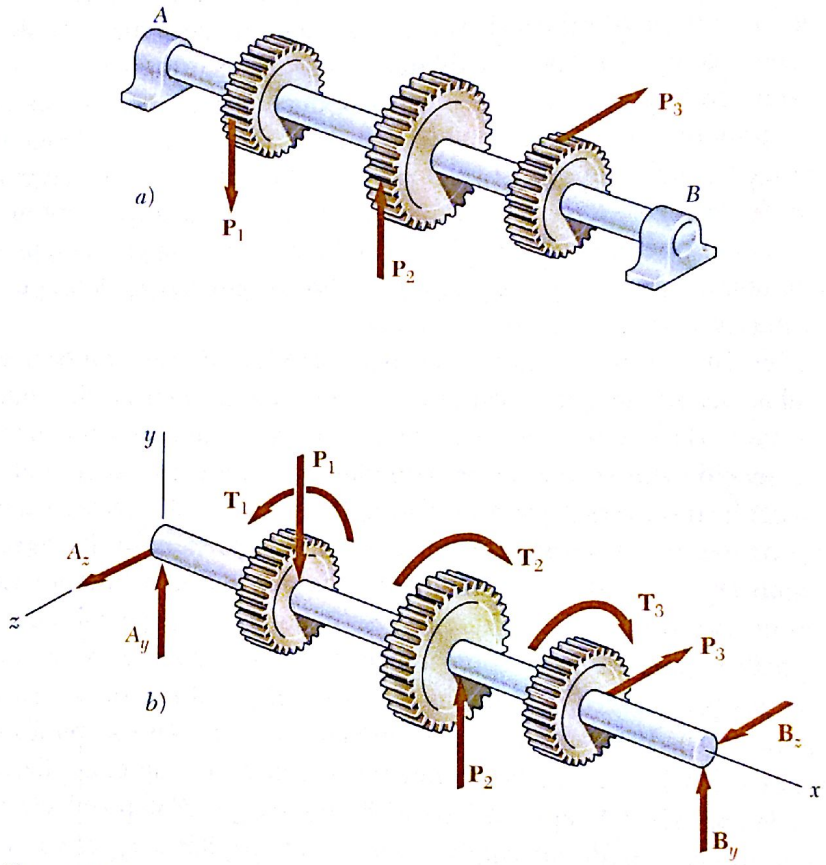
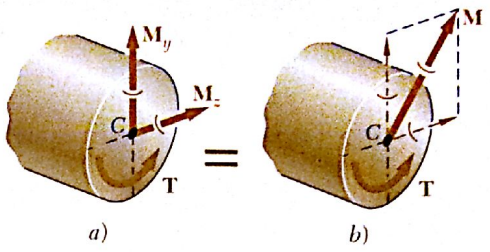


Figura 8.11

Los esfuerzos cortantes producidos en el eje por las cargas transversales por lo general son mucho más pequeños que los provocados por los pares de torsión, por lo cual no se incluirán en este análisis.† Sin embargo, los esfuerzos normales debidos a las cargas transversales, pueden ser muy grandes y, como verá, debiera tomarse en cuenta su contribución al esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$.

† Para una aplicación en la que deban considerarse los esfuerzos cortantes producidos por las cargas transversales, véanse los problemas 8.21 y 8.22.

Considere la sección transversal del eje en algún punto C. Se representa el par de torsión $\mathbf{T}$ y los pares de flexión $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ que actúan, respectivamente, en un plano horizontal y en otro vertical por medio de los vectores que se muestran (figura 8.12*a*). Dado que cualquier diámetro de la sección es un eje principal de inercia para la sección, puede reemplazarse $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ por su resultante $\mathbf{M}$ (figura 8.12*b*) con el objeto de calcular los esfuerzos normales σ_x ejercidos sobre la sección. Se encuentra así que σ_x es máximo al final del diámetro perpendicular al vector que representa a $\mathbf{M}$ (figura 8.13). Al recordar que los valores de los esfuerzos normales en ese punto son, respectivamente, $\sigma_m = Mc/I$ y cero, mientras que el esfuerzo cortante es $\tau_m = Tc/J$, se grafican los puntos correspondientes X y Y en un diagrama de círculo de Mohr (figura 8.14) y se determina el valor del esfuerzo cortante máximo:



a) *b)*

Figura 8.12

$$\tau_{\text{máx}} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

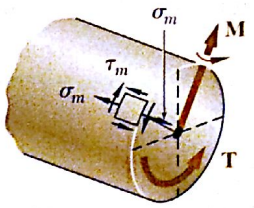


Figura 8.13

Y, como se vio, para una sección transversal circular o anular, $2I = J$, queda

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2} \tag{8.5}$$

Se deduce que la razón mínima permisible J/c para la sección transversal de la viga es

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} \tag{8.6}$$

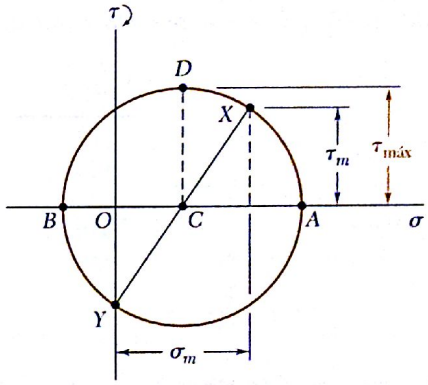


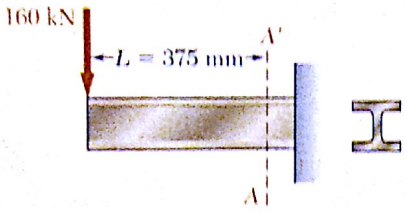
Figura 8.14

en donde el numerador del miembro del lado derecho de la expresión obtenida representa el valor máximo de $\sqrt{M^2 + T^2}$ en el eje, y τ_{perm} es el esfuerzo cortante permisible. Al expresar el momento flexionante M en términos de sus componentes en los dos planos coordenados, se puede escribir

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} \tag{8.7}$$

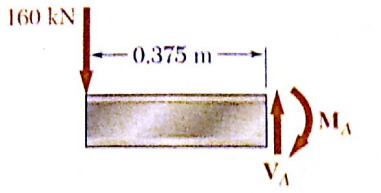
Las ecuaciones (8.6) y (8.7) pueden usarse para diseñar ejes circulares tanto sólidos como huecos y debieran compararse con la ecuación (3.22) de la sección 3.7, la cual se obtuvo con la suposición de tener únicamente una carga de torsión.

La determinación del máximo valor de $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ se facilitará si se dibujan los diagramas del momento flexionante que corresponden a M_y y a M_z, así como un tercer diagrama que represente los valores de T a lo largo del eje (véase problema modelo 8.3).



PROBLEMA MODELO 8.1

Se aplica una fuerza de 160 kN, como se muestra en la figura, en el extremo de una viga de acero *laminada* W200 × 52. Ignore el efecto de los fileteados y concentraciones de esfuerzos y determine si los esfuerzos normales en la viga satisfacen una especificación de diseño menor o igual que 150 MPa en la sección A-A'.

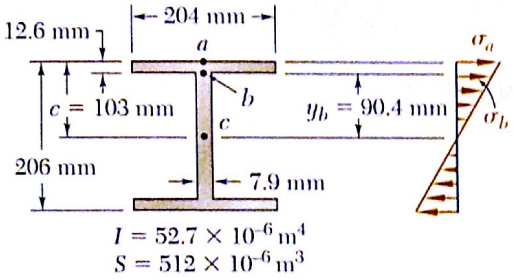


SOLUCIÓN

Momento cortante y flexionante. En la sección A-A' se tiene

$$M_A = (160\text{ kN})(0.375\text{ m}) = 60\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_A = 160\text{ kN}$$

Esfuerzos normales en el plano transversal. Al buscar en la tabla de *Propiedades de las formas de acero laminado* en el apéndice C, se obtienen los datos que se muestran y con ellos se determinan los esfuerzos σ_a y σ_b.



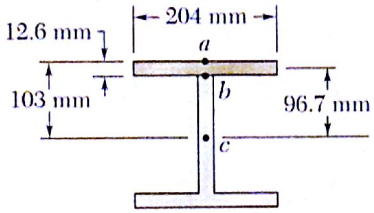
En el punto a:

$$\sigma_a = \frac{M_A}{S} = \frac{60\text{ kN}\cdot\text{m}}{512\times10^{-6}\text{ m}^3} = 117.2\text{ MPa}$$

En el punto b:

$$\sigma_b = \sigma_a\frac{y_b}{c} = (117.2\text{ MPa})\frac{90.4\text{ mm}}{103\text{ mm}} = 102.9\text{ MPa}$$

Se observa que todos los esfuerzos normales sobre el plano transversal son menores que 150 MPa.



Esfuerzos cortantes sobre el plano transversal

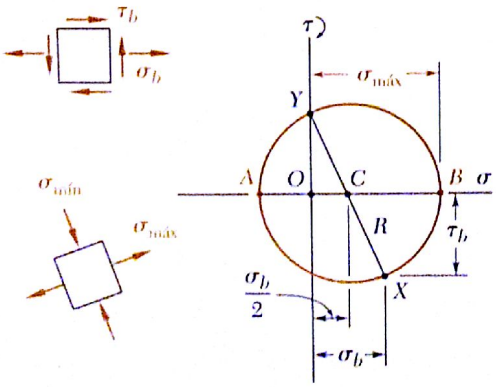
En el punto a:

$$Q = 0 \qquad \tau_a = 0$$

En el punto b:

$$Q = (204\times12.6)(96.7) = 248.6\times10^3\text{ mm}^3 = 248.6\times10^{-6}\text{ m}^3$$

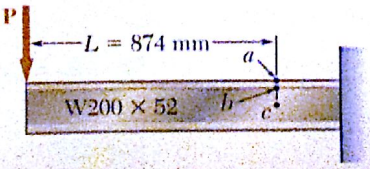
$$\tau_b = \frac{V_AQ}{It} = \frac{(160\text{ kN})(248.6\times10^{-6}\text{ m}^3)}{(52.7\times10^{-6}\text{ m}^4)(0.0079\text{ m})} = 95.5\text{ MPa}$$



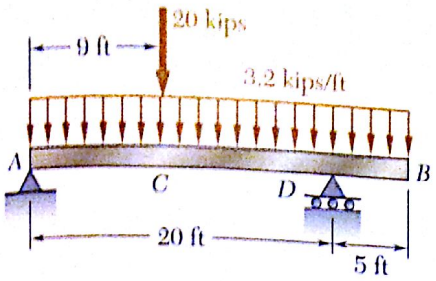
Esfuerzos principales en el punto b. El estado de los esfuerzos en el punto b consiste en el esfuerzo normal $\sigma_b = 102.4$ MPa y el esfuerzo cortante $\tau_b = 95.5$ MPa. Se dibuja el círculo de Mohr y se encuentra que

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{1}{2}\sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_b\right)^2 + \tau_b^2}$$
$$= \frac{102.9}{2} + \sqrt{\left(\frac{102.9}{2}\right)^2 + (95.5)^2}$$
$$\sigma_{\text{máx}} = 159.9\text{ MPa}$$

La especificación $\sigma_{\text{máx}} \leq 150$ MPa, *no* se satisface ◀

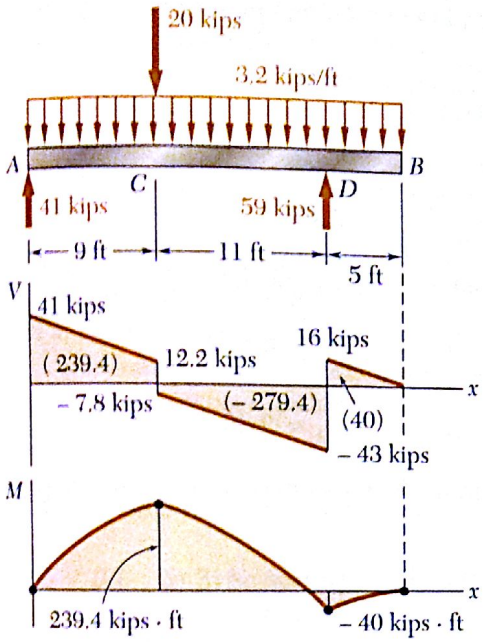


Comentario. Para esta viga y carga, el esfuerzo principal en el punto b es 36% mayor que el esfuerzo normal en el punto a. Para $L \geq 874$ mm, el esfuerzo normal máximo ocurriría en el punto a.



PROBLEMA MODELO 8.2

La viga colgante AB soporta una carga de 3.2 kips/ft uniformemente distribuida y una carga concentrada de 20 kips en C. Si se sabe que para el grado de acero que se usará $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $\tau_{perm} = 14.5$ ksi seleccione la forma del perfil de alas anchas que debe usarse.



SOLUCIÓN

Reacciones en A y en D. Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga. De las ecuaciones de equilibrio $\Sigma M_D = 0$ y $\Sigma M_A = 0$ se encuentran los valores de R_A y R_D que se muestran en el diagrama.

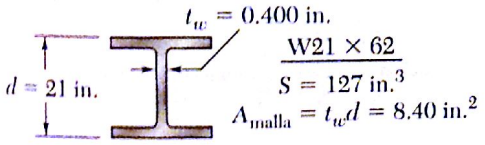
Diagramas de momento cortante y flexionante. Usando los métodos de las secciones 5.2 y 5.3, se dibujan los diagramas y se observa que

$$|M|_{máx} = 239.4 \text{ kips} \cdot \text{ft} = 2\,873 \text{ kips} \cdot \text{in.} \qquad |V|_{máx} = 43 \text{ kips}$$

Módulo de la sección. Para $|M|_{máx} = 2\,873$ kips · in. y $\sigma_{perm} = 24$ ksi, el módulo de la sección mínima aceptable de la forma de acero laminado es

$$S_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{2\,873 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{24 \text{ ksi}} = 119.7 \text{ in.}^3$$

Selección de la forma del perfil de alas anchas. De la tabla *Propiedades de las formas de acero laminado* del apéndice D, se obtiene la lista de formas que tienen un módulo de sección más grande que $S_{mín}$ y que también son la forma más ligera en un grupo de profundidad dada.



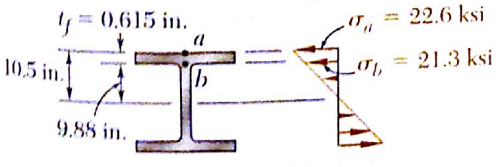
Forma	S (in.^{3})
W24 × 68	154
W21 × 62	127
W18 × 76	146
W16 × 77	134
W14 × 82	123
W12 × 96	131

Y se selecciona la forma más ligera disponible, que es W21 × 62 ◀

Esfuerzo cortante. Se supone que el esfuerzo cortante máximo está uniformemente distribuido sobre la malla del área de una forma W21 × 62 y se escribe

$$\tau_m = \frac{V_{máx}}{A_{malla}} = \frac{43 \text{ kips}}{8.40 \text{ in.}^2} = 5.12 \text{ ksi} < 14.5 \text{ ksi} \qquad \text{(OK)}$$

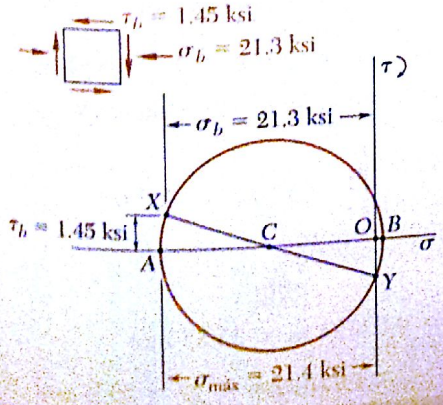
Esfuerzo principal en el punto b. Se revisa que el esfuerzo principal máximo en el punto b en la sección crítica donde M es máximo no excede $\sigma_{perm} = 24$ ksi. Se escribe



$$\sigma_a = \frac{M_{máx}}{S} = \frac{2\,873 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{127 \text{ in.}^3} = 22.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (22.6 \text{ ksi}) \frac{9.88 \text{ in.}}{10.50 \text{ in.}} = 21.3 \text{ ksi}$$

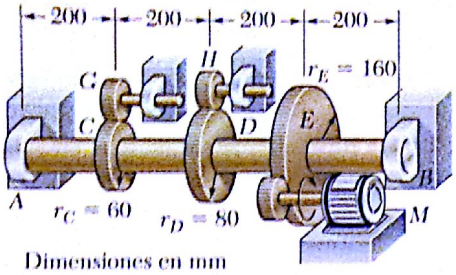
Conservativamente, $\tau_b = \dfrac{V}{A_{malla}} = \dfrac{12.2 \text{ kips}}{8.40 \text{ in.}^2} = 1.45 \text{ ksi}$



Se dibuja el círculo de Mohr y se encuentra que

$$\sigma_{máx} = \tfrac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{21.3 \text{ ksi}}{2} + \sqrt{\left(\frac{21.3 \text{ ksi}}{2}\right)^2 + (1.45 \text{ ksi})^2}$$

$$\sigma_{máx} = 21.4 \text{ ksi} \leq 24 \text{ ksi} \quad \text{(OK)} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 8.3

El eje sólido *AB* gira a 480 rpm y transmite 30 kW del motor *M* a los elementos de máquina conectados a los engranes *G* y *H*; se extraen 20 kW en el engrane *G* y 10 kW en *H*. Sabiendo que $\tau_{perm} = 50$ MPa, determine el diámetro más pequeño permisible para el eje *AB*.

SOLUCIÓN

Pares de torsión ejercidos sobre los engranes. Se observa que $f = 480$ rpm $= 8$ Hz y se determina el par de torsión ejercido sobre el engrane *E*:

$$T_E = \frac{P}{2\pi f} = \frac{30 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 597 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La fuerza tangencial que actúa sobre el engrane es

$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.16 \text{ m}} = 3.73 \text{ kN}$$

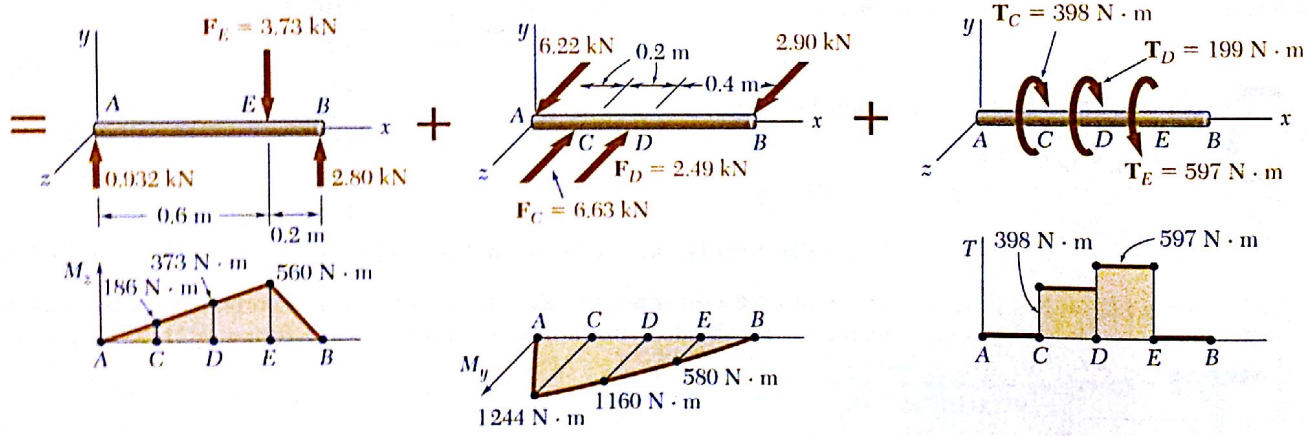
Se efectúan análisis similares para los engranes *C* y *D*, y quedan

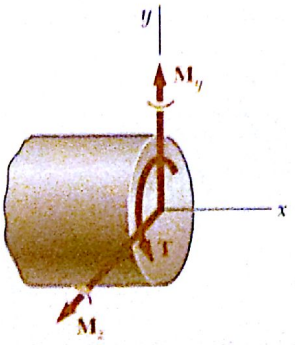
$$T_C = \frac{20 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 398 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad F_C = 6.63 \text{ kN}$$

$$T_D = \frac{10 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 199 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad F_D = 2.49 \text{ kN}$$

Ahora, se reemplazan las fuerzas en los engranes por sistemas equivalentes de pares de fuerzas.

Diagramas de momento flector y de par de torsión





Sección transversal crítica. Al calcular $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ en todas las secciones potencialmente críticas, se encuentra que su valor máximo ocurre justo a la derecha de *D*:

$$\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}\right)_{\text{máx}} = \sqrt{(1\,160)^2 + (373)^2 + (597)^2} = 1\,357 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Diámetro del eje. Para $\tau_{perm} = 50$ MPa, la ecuación (7.32) conduce a

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{perm}} = \frac{1\,357 \text{ N} \cdot \text{m}}{50 \text{ MPa}} = 27.14 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Para un eje sólido circular de radio *c*, se tiene

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}c^3 = 27.14 \times 10^{-6} \qquad c = 0.02585 \text{ m} = 25.85 \text{ mm}$$

Diámetro $= 2c = 51.7$ mm ◀

PROBLEMAS

8.1 Una viga de acero laminado W10 × 39 soporta una carga **P**, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 45$ kips, $a = 10$ in. y $\sigma_{perm} = 18$ ksi, *a*) determine el máximo valor del esfuerzo normal σ_m en la viga, *b*) calcule el máximo valor del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con el patín, *c*) diga si la forma especificada es aceptable en lo que concierne a estos dos esfuerzos.

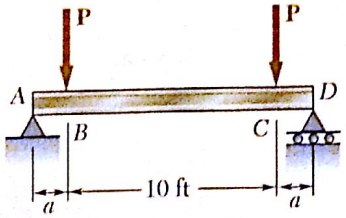


Figura P8.1

8.2 Resuelva el problema 8.1 si $P = 22.5$ kips y $a = 20$ in.

8.3 Una viga en voladizo W920 × 446 de acero laminado soporta una carga **P** como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 700$ kN, $a = 2.5$ m y $\sigma_{perm} = 100$ MPa, *a*) determine el valor máximo del esfuerzo normal σ_m en la viga, *b*) calcule el valor máximo del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con el patín, *c*) diga si la forma especificada es aceptable en lo referente a los dos esfuerzos mencionados.

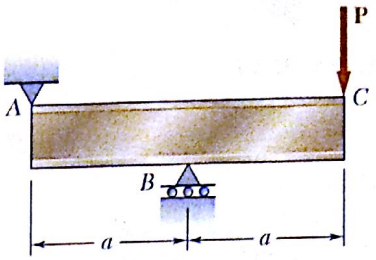


Figura P8.3

8.4 Retome el problema 8.4, y ahora suponga que $P = 850$ kN y $a = 2.0$ m.

8.5 y 8.6 *a*) Si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $\tau_{perm} = 14.5$, seleccione el perfil de patín ancho más económico que debe usarse para sostener la carga que se muestra en la figura. *b*) Determine los valores que se esperan de σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la junta del alma con el patín de la viga seleccionada.

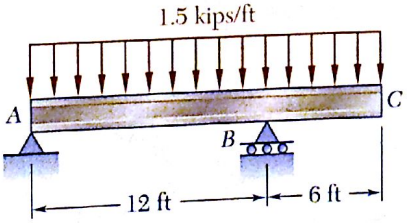


Figura *P8.5*

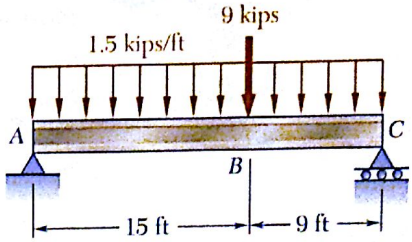


Figura *P8.6*

8.7 y 8.8 *a*) Si se sabe que $\sigma_{perm} = 160$ MPa y que $\tau_{perm} = 100$ Mpa, seleccione la forma métrica de patín ancho más económica que debe emplearse para soportar la carga que se indica en la figura. *b*) Determine los valores esperados para σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con el patín de la viga seleccionada.

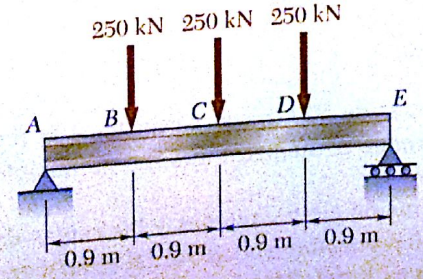


Figura P8.7

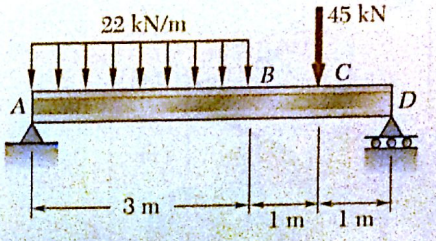


Figura P8.8

8.9 a 8.14 Cada uno de los siguientes problemas se refiere al perfil de acero laminado seleccionado en un problema del capítulo 5 para sostener una carga dada a costo mínimo a fin de satisfacer el requerimiento de que $\sigma_m \leq \sigma_{perm}$. Para el diseño seleccionado, determine *a*) el valor real de σ_m en la viga, *b*) el máximo valor del esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la unión del alma con el patín.

8.9 La carga del problema 5.74 y el perfil seleccionado W530 × 66.

8.10 La carga del problema 5.73 y el perfil seleccionado W250 × 28.4.

8.11 La carga del problema 5.78 y el perfil seleccionado S310 × 47.3.

8.12 La carga del problema 5.75 y el perfil seleccionado S20 × 66.

8.13 La carga del problema 5.77 y el perfil seleccionado S510 × 98.3.

8.14 La carga del problema 5.76 y el perfil seleccionado S20 × 66.

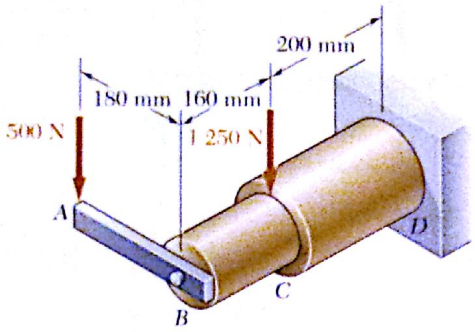


Figura P8.15 y P8.16

8.15 Determine los diámetros mínimos permisibles para las varillas sólidas *BC* y *CD* que se muestran en la figura. Utilice $\tau_{perm} = 60$ MPa y desprecie el efecto de los filetes y de las concentraciones de esfuerzo.

8.16 Si se sabe que las varillas *BC* y *CD* de la figura tienen diámetros de 24 mm y 36 mm respectivamente, determine el esfuerzo cortante máximo en cada varilla. Desprecie el efecto de los filetes y de las concentraciones de esfuerzo.

8.17 Determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido *ABCD*, si se sabe que $\tau_{perm} = 60$ MPa y que el radio del disco *B* es $r = 80$ mm.

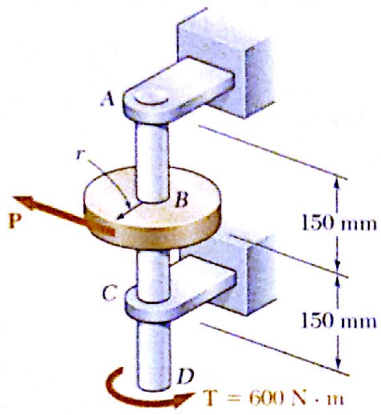


Figura *P8.17*

8.18 La fuerza de 4 kN es paralela al eje *x*, y la fuerza **Q** es paralela al eje *z*. El eje *AD* es hueco. Si se sabe que el diámetro interior es la mitad del diámetro exterior y que $\tau_{perm} = 60$ MPa, determine el diámetro exterior mínimo permisible para el eje.

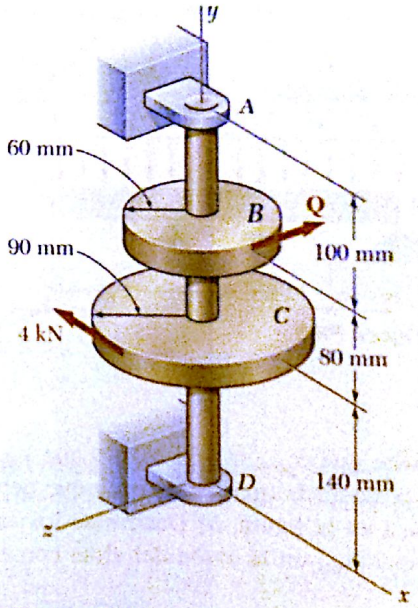


Figura *P8.18*

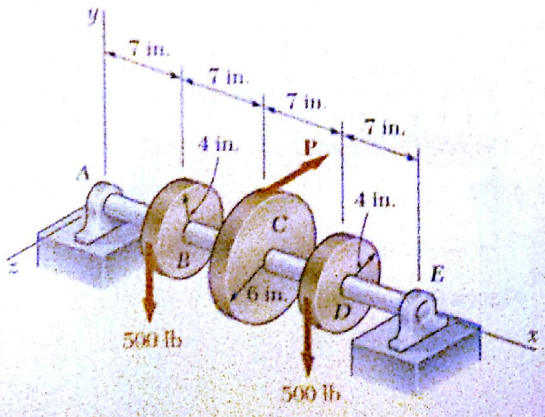


Figura P8.19

8.19 Las dos fuerzas de 500 lb son verticales y la fuerza **P** es paralela al eje *z*. Si $\tau_{perm} = 8$ ksi, determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido *AE*.

8.20 Para el sistema de eje y engranes y las cargas del problema 8.19, determine el diámetro mínimo permisible del eje *AE*, si se sabe que el eje es hueco y tiene un diámetro interior que es $\frac{2}{3}$ del diámetro exterior.

8.21 Utilice la notación de la sección 8.3 y desprecie el efecto que tienen los esfuerzos cortantes ocasionados por las cargas transversales, para demostrar que el esfuerzo normal máximo en un eje cilíndrico puede expresarse como

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{c}{J}[(M_y^2 + M_z^2)^{\frac{1}{2}} + (M_y^2 + M_z^2 + T^2)^{\frac{1}{2}}]_{\text{máx}}$$

8.22 En la sección 8.3 se estableció que generalmente los esfuerzos cortantes producidos en un eje por cargas transversales son mucho más pequeños que los producidos por los pares de torsión. En los problemas precedentes se ignoró su efecto y se supuso que el esfuerzo cortante máximo en una sección dada ocurría en un punto H (figura P8.22*a*) y era igual a la expresión obtenida para la ecuación (8.5), a saber

$$\tau_H = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Demuestre que el esfuerzo cortante máximo en el punto K (figura P8.22*b*), donde el esfuerzo cortante V es mayor, puede expresarse como

$$\tau_K = \frac{c}{J}\sqrt{(M\cos\beta)^2 + (\tfrac{2}{3}cV + T)^2}$$

donde β, es el ángulo entre los vectores **V** y **M**. Es evidente que el efecto del esfuerzo cortante V no puede ignorarse cuando $\tau_K \geq \tau_H$. (*Sugerencia*: Considere que sólo la componente **M** a lo largo de **V** contribuye al esfuerzo cortante en K.)

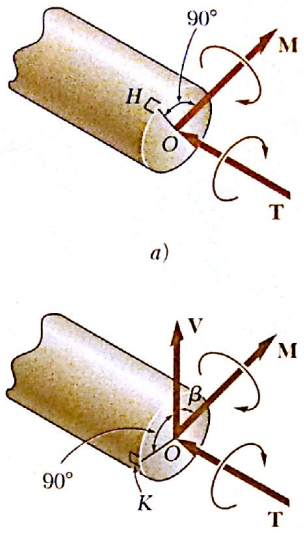


Figura P8.22

8.23 Los ejes sólidos *ABC* y *DEF*, así como los engranes que se muestran en la figura, se utilizan para transmitir 20 hp del motor *M* a un elemento de máquina conectado al eje *DEF*. Si se sabe que el motor gira a 240 rpm y que $\tau_{\text{perm}} = 7.5$ ksi, determine el diámetro mínimo permisible *a*) del eje *ABC*, *b*) del eje *DEF*.

8.24 Resuelva el problema 8.23 si el motor gira a 360 rpm.

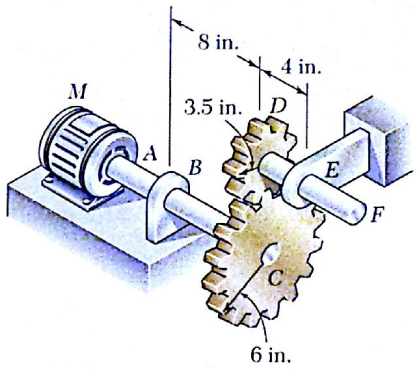


Figura *P8.23*

8.25 El eje sólido *AB* gira a 450 rpm y transmite 20 kW desde el motor *M* a los elementos de máquina conectados a los engranes *F* y *G*. Si $\tau_{\text{perm}} = 55$ MPa y se supone que se extraen 8 kW en el engrane *F* y 12 kW en el engrane *G*, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AB*.

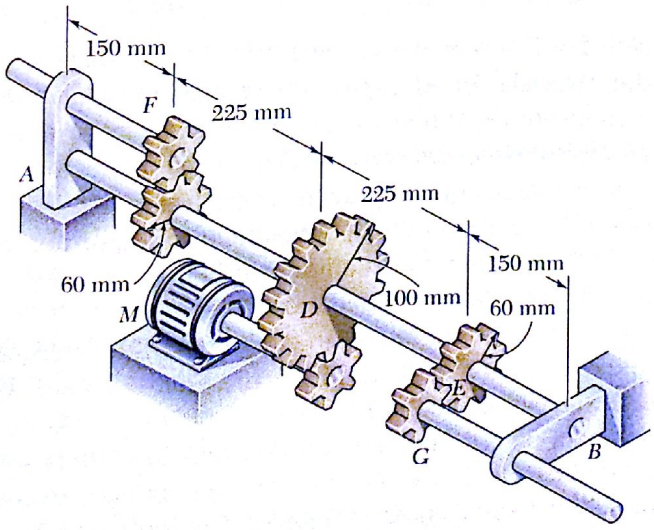


Figura P8.25

8.26 Retome el problema 8.25, y ahora suponga que los 20 kW se extraen en el engrane *G*.

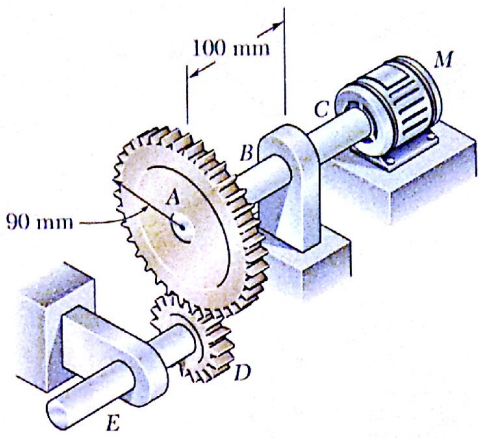


Figura P8.27

8.27 El eje sólido *ABC* y los engranes que se muestran en la figura se utilizan para transmitir 10 kW del motor *M* a un elemento de máquina conectado al engrane *D*. Si el motor gira a 240 rpm y $\tau_{perm} = 60$ MPa, determine el diámetro mínimo permisible del eje *ABC*.

8.28 Suponga que el eje *ABC* del problema 8.27 es hueco y tiene un diámetro exterior de 50 mm, determine su diámetro interior máximo permisible.

8.29 El eje sólido *AE* gira a 600 rpm y transmite 60 hp desde el motor *M* a los elementos de máquina conectados a los engranes *G* y *H*. Si $\tau_{perm} = 8$ ksi y se sabe que se extraen 40 hp en el engrane *G* y 20 hp en el engrane *H*, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AE*.

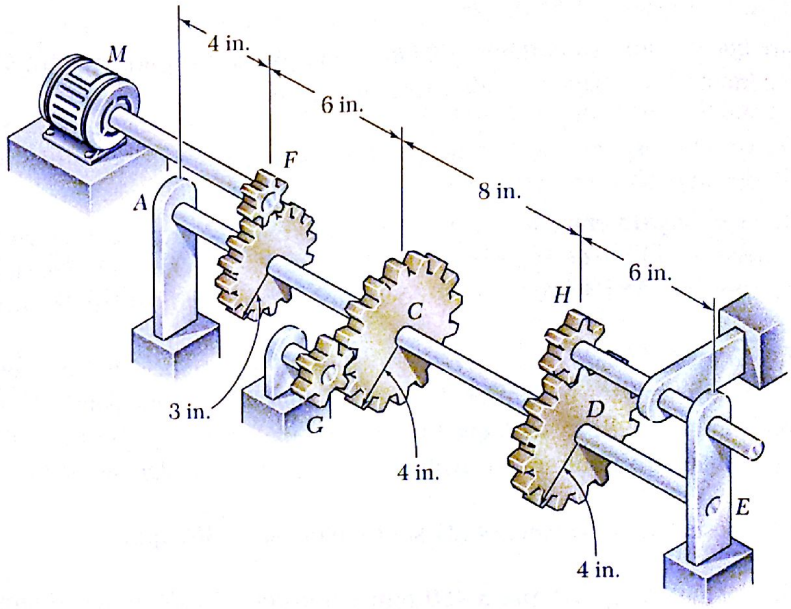


Figura P8.29

8.30 Retome el problema 8.29, y ahora suponga que se extraen 30 hp en el engrane *G* y 30 hp en el engrane *H*.

*8.4 ESFUERZOS BAJO CARGAS COMBINADAS

En los capítulos 1 y 2 se aprendió a determinar los esfuerzos causados por una carga axial centrada. En el capítulo 3 se analizó la distribución de esfuerzos en un elemento cilíndrico sometido a un par giratorio. En el capítulo 4 se determinaron los esfuerzos ocasionados por pares flectores y, en los capítulos 5 y 6, los esfuerzos que producen cargas transversales. Como se verá en seguida, es posible combinar los conocimientos adquiridos para determinar los esfuerzos en miembros estructurales esbeltos o en elementos de máquina sometidos a casi cualquier condición de carga.

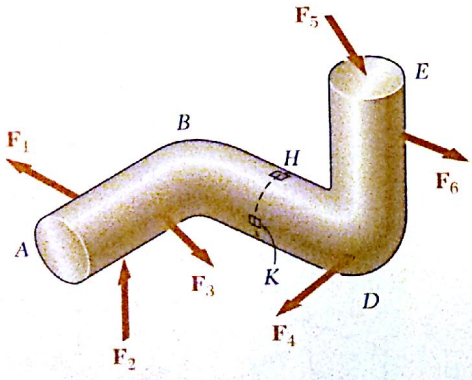


Figura 8.15

Por ejemplo, considere un miembro curvado *ABDE* de sección transversal circular sujeto a varias fuerzas (figura 8.15). Con el objeto de calcular los esfuerzos que producen en los puntos *H* o *K* las cargas dadas, primero se traza una sección en dichos puntos y, en el centroide *C* de la sección, se determina el sistema de par de fuerzas requeridas para conservar el equilibrio de la porción *ABC*.† Este sistema representa las fuerzas internas en la sec-

† El sistema de par de fuerzas determinado en *C* también puede definirse como *equivalente a las fuerzas que actúan sobre la porción del elemento localizado a la derecha de la sección* (vea el ejemplo 8.01).

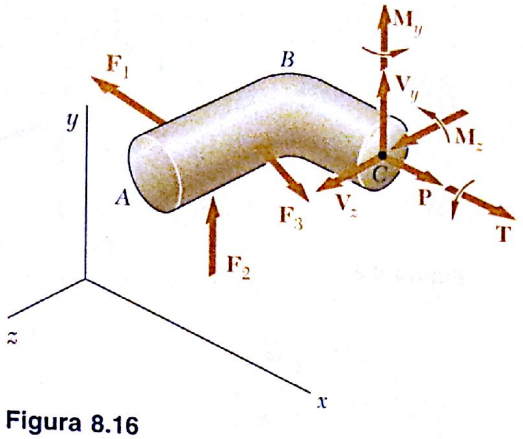


Figura 8.16

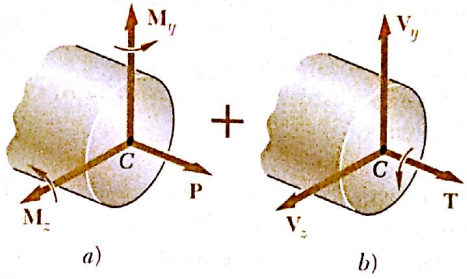


Figura 8.17

ción y, en general, consta de tres componentes de fuerza y tres pares de vectores que se supone se dirigen según se ilustra en la figura 8.16.

La fuerza **P** es axial centrada y produce esfuerzos normales en la sección. El par de vectores $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ provocan que el elemento se tuerza y también producen esfuerzos normales en la sección. Por tanto, se agrupan con la fuerza **P** en la parte *a* de la figura 8.17 y las sumas σ_x de los esfuerzos normales que producen en los puntos *H* y *K* se muestran en la parte *a* de la figura 8.18. Es posible determinar estos esfuerzos, como se vio en la sección 4.14.

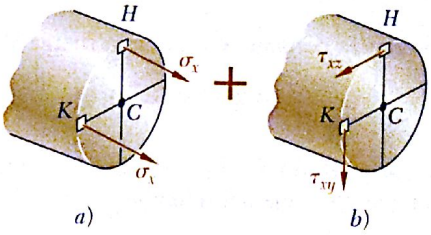


Figura 8.18

Por otro lado, el par giratorio **T** y los esfuerzos cortantes $\mathbf{V}_y$ y $\mathbf{V}_z$ producen esfuerzos cortantes en la sección. Las sumas τ_{xy} y τ_{xz} de las componentes de los esfuerzos cortantes que producen en los puntos *H* y *K* se muestran en la parte *b* de la figura 8.18 y se determinan como se indica en las secciones 3.4 y 6.3.† Los esfuerzos normales y cortantes que se muestran en las partes *a* y *b* de la figura 8.18 pueden combinarse ahora y manifestarse en los puntos H y K en la superficie del elemento (figura 8.19).

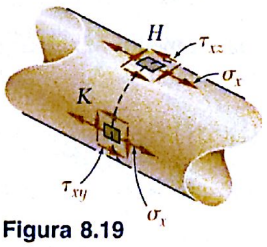


Figura 8.19

Los esfuerzos principales y la orientación de los planos principales en los puntos *H* y *K* pueden determinarse a partir de los valores σ_x, τ_{xy} y τ_{xz} en cada uno de dichos puntos con alguno de los métodos que se presentaron en el capítulo 7 (figura 8.20). Los valores del esfuerzo cortante máximo en cada uno de estos puntos y los planos correspondientes se pueden encontrar en una forma similar.

Los resultados obtenidos en esta sección son válidos sólo hasta donde lo permiten las condiciones de aplicación del principio de superposición (sección 2.12) y el principio de Saint-Venant (sección 2.17). Esto significa que los esfuerzos involucrados no deben exceder el límite proporcional del material, que las deformaciones debidas a alguna de las cargas no afectan la determinación de los esfuerzos debidas a las demás, y que la sección utilizada en el análisis no debe estar demasiado cerca de los puntos de aplicación de las fuerzas dadas. Es evidente, del primero de estos requerimientos, que el método aquí presentado no es aplicable a deformaciones plásticas.

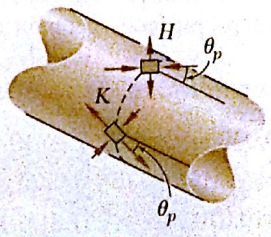


Figura 8.20

† Observe que con el conocimiento que en este momento posee el lector, puede calcular el efecto del par giratorio **T** sólo en los casos de ejes circulares, de elementos con sección transversal rectangular (véase sección 3.12), o de elementos huecos de pared delgada (véase sección 3.13).

EJEMPLO 8.01

Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de magnitudes $P_1 = 15$ kN y $P_2 = 18$ kN, al extremo A de la barra AB, la cual está soldada a un elemento cilíndrico BD de radio $c = 20$ mm (figura 8.21). Si se sabe que la distancia de A al eje del elemento BD es $a = 50$ mm, suponga que todos los esfuerzos permanecen por abajo del límite proporcional del material, y determine *a*) los esfuerzos normal y cortante en el punto K de la sección transversal del elemento BD localizado a una distancia $b = 60$ mm del extremo B, *b*) los ejes y esfuerzos principales en K, *c*) el esfuerzo cortante máximo en K.

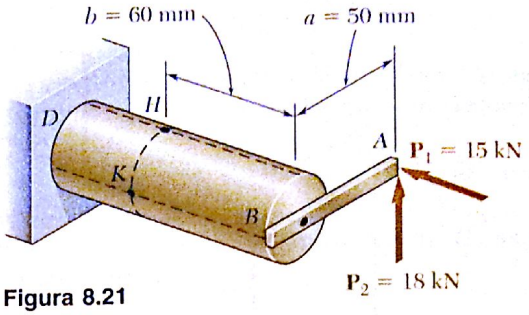


Figura 8.21

Fuerzas internas en una sección dada. Primero se reemplazan las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ por un sistema equivalente de fuerzas y pares aplicados en el centro C de la sección que contiene al punto K (figura 8.22). Este sistema, que representa las fuerzas internas en la sección, consiste en las siguientes fuerzas y pares:

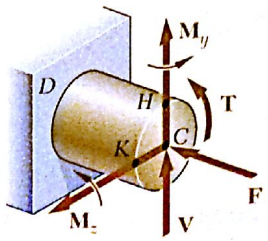


Figura 8.22

1. Una fuerza axial $\mathbf{F}$ centrada igual a la fuerza $\mathbf{P}_1$, de magnitud

$$F = P_1 = 15 \text{ kN}$$

2. Una fuerza cortante $\mathbf{V}$ igual a la fuerza $\mathbf{P}_2$, de magnitud

$$V = P_2 = 18 \text{ kN}$$

3. Un par giratorio $\mathbf{T}$ de par de torsión T igual al momento de $\mathbf{P}_2$ respecto al eje del miembro BD:

$$T = P_2 a = (18 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4. Un par flector $\mathbf{M}_y$, de momento M_y igual al momento de $\mathbf{P}_1$ respecto a un eje vertical que pasa a través de C:

$$M_y = P_1 a = (15 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5. Un par flector $\mathbf{M}_z$, de momento M_z igual al momento de $\mathbf{P}_2$ respecto a un eje horizontal y transversal que pasa por C:

$$M_z = P_2 b = (18 \text{ kN})(60 \text{ mm}) = 1080 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Los resultados que se obtienen se muestran en la figura 8.23.

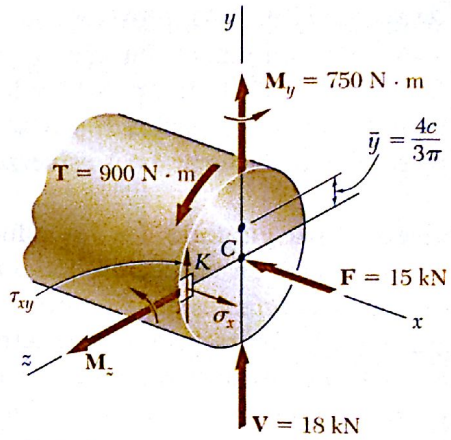


Figura 8.23

a) Esfuerzos normal y cortante en el punto K. Cada una de las fuerzas y pares que se aprecian en la figura 8.23 pueden producir un esfuerzo normal o cortante en el punto K. El propósito es calcular por separado cada uno de estos esfuerzos, y luego sumar los esfuerzos normales y los cortantes. Pero primero se deben determinar las propiedades geométricas de la sección.

Propiedades geométricas de la sección. Se tiene:

$$A = \pi c^2 = \pi(0.020 \text{ m})^2 = 1.257 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0.020 \text{ m})^4 = 125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$
$$J_C = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(0.020 \text{ m})^4 = 251.3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

También se determinan el primer momento Q y el ancho t del área de la sección transversal localizada arriba del eje z. Teniendo presente que para un semicírculo de radio c se cumple $\bar{y} = 4c/3\pi$ queda

$$Q = A'\bar{y} = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0.020 \text{ m})^3$$
$$= 5.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

y

$$t = 2c = 2(0.020 \text{ m}) = 0.040 \text{ m}$$

Esfuerzos normales. Se observa que los esfuerzos normales se producen en K debido a la fuerza centrada $\mathbf{F}$ y el par flector $\mathbf{M}_y$, pero que el par $\mathbf{M}_z$ no produce ningún esfuerzo en K, ya que K se ubica sobre el eje neutral que corresponde a dicho par. Para determinar cada signo en la figura 8.23, se tiene

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -11.9 \text{ MPa} + \frac{(750 \text{ N} \cdot \text{m})(0.020 \text{ m})}{125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$
$$= -11.9 \text{ MPa} + 119.3 \text{ MPa}$$
$$\sigma_x = +107.4 \text{ MPa}$$

Esfuerzos cortantes. Éstos consisten en el esfuerzo cortante $(\tau_{xy})_V$ debido a la cortante **V** y en el esfuerzo cortante $(\tau_{xy})_{giro}$ ocasionado por el par de torsión **T**. Al tener en cuenta los valores obtenidos para Q, t, I_z y J_C, queda

$$(\tau_{xy})_V = +\frac{VQ}{I_z t} = +\frac{(18 \times 10^3\ \text{N})(5.33 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{(125.7 \times 10^{-9}\ \text{m}^4)(0.040\ \text{m})}$$
$$= +19.1\ \text{MPa}$$

$$(\tau_{xy})_{giro} = -\frac{Tc}{J_C} = -\frac{(900\ \text{N} \cdot \text{m})(0.020\ \text{m})}{251.3 \times 10^{-9}\ \text{m}^4} = -71.6\ \text{MPa}$$

Al sumar estas dos expresiones, se obtiene τ_{xy} en el punto K.

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_V + (\tau_{xy})_{giro} = +19.1\ \text{MPa} - 71.6\ \text{MPa}$$
$$\tau_{xy} = -52.5\ \text{MPa}$$

En la figura 8.24, se muestran el esfuerzo normal σ_x y los esfuerzos cortantes τ_{xy} actuando sobre un elemento cuadrado que se localiza en K sobre la superficie del miembro cilíndrico. Observe que se incluyen los esfuerzos cortantes que actúan sobre los lados longitudinales del elemento.

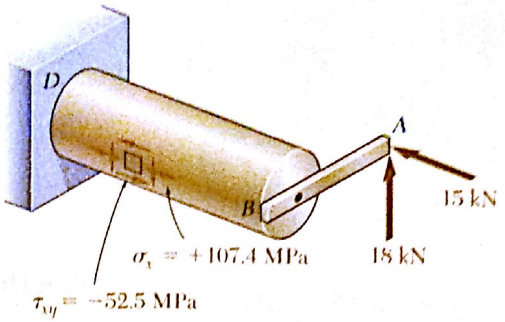


Figura 8.24

b) Planos y esfuerzos principales en el punto K. Puede usarse cualquiera de los dos métodos del capítulo 7 para determinar los planos y esfuerzos principales en K. Se selecciona el círculo de Mohr para graficar el punto X de las coordenadas $\sigma_x = +107.4$ MPa y $-\tau_{xy} = +52.5$ MPa y el punto Y de las coordenadas $\sigma_y = 0$ y $+\tau_{xy} = -52.5$ MPa, y se dibuja el círculo de diámetro XY (figura 8.25). Se observa que

$$OC = CD = \tfrac{1}{2}(107.4) = 53.7\ \text{MPa} \qquad DX = 52.5\ \text{MPa}$$

se determina la orientación de los planos principales:

$$\tan 2\theta_p = \frac{DX}{CD} = \frac{52.5}{53.7} = 0.97765 \qquad 2\theta_p = 44.4° \downarrow$$
$$\theta_p = 22.2° \downarrow$$

Ahora se determina el radio del círculo,

$$R = \sqrt{(53.7)^2 + (52.5)^2} = 75.1\ \text{MPa}$$

y los esfuerzos principales,

$$\sigma_{máx} = OC + R = 53.7 + 75.1 = 128.8\ \text{MPa}$$
$$\sigma_{mín} = OC - R = 53.7 - 75.1 = -21.4\ \text{MPa}$$

Los resultados que se obtienen se muestran en la figura 8.26.

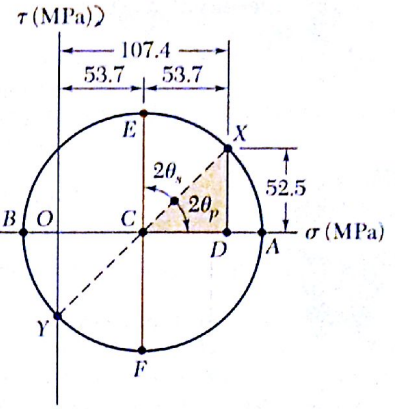


Figura 8.25

c) Esfuerzo cortante máximo en el punto K. Este esfuerzo corresponde a los puntos E y F que aparecen en la figura 8.25. Se tiene

$$\tau_{máx} = CE = R = 75.1\ \text{MPa}$$

Se observa que $2\theta_s = 90° - 2\theta_p = 90° - 44.4° = 45.6°$, y se concluye que los planos de esfuerzo cortante máximo forman un ángulo $\theta_p = 22.8°$ ↰ con la horizontal. En la figura 8.27 se presenta el incremento correspondiente. Observe que los esfuerzos normales que actúan sobre este elemento están representados por OC en la figura 8.25 y son iguales a $+53.7$ MPa.

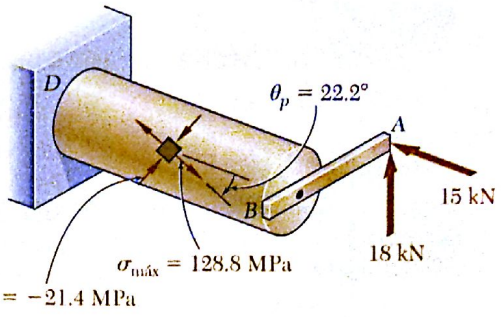


Figura 8.26

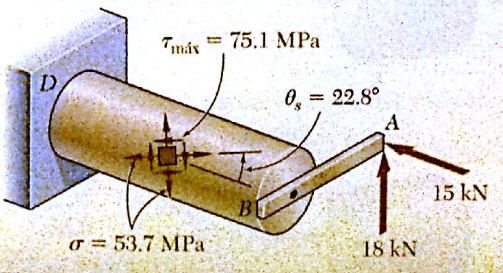
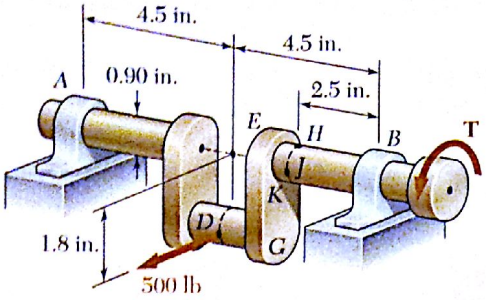
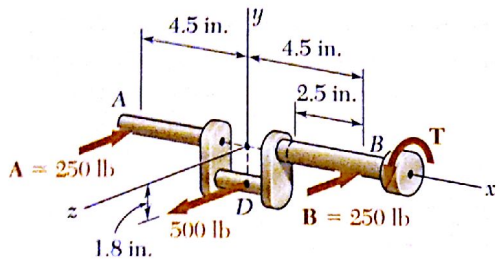


Figura 8.27



PROBLEMA MODELO 8.4

Una fuerza horizontal de 500 lb actúa en el punto D de un cigüeñal AB, que se mantiene en equilibrio gracias a un par giratorio **T** y a las reacciones A y B. Sabiendo que los cojinetes se alinean automáticamente y no ejercen pares sobre el eje, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos H, J, K y L, que se ubican en los extremos de los diámetros vertical y horizontal de una sección transversal localizada a 2.5 in. a la izquierda del cojinete B.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre. Cigüeñal completo. $A = B = 250$ lb

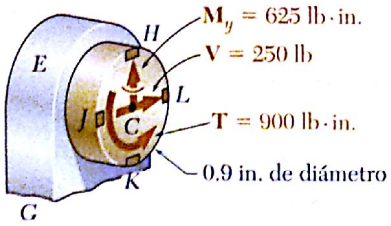
$$+\circlearrowleft \Sigma M_x = 0: \qquad -(500 \text{ lb})(1.8 \text{ in.}) + T = 0 \qquad T = 900 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Fuerzas internas en la sección transversal. Se reemplaza la reacción **B** y el par giratorio **T** por un sistema de par de fuerzas equivalente en el centro C de la sección transversal que contiene a H, J, K y L.

$$V = B = 250 \text{ lb} \qquad T = 900 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$M_y = (250 \text{ lb})(2.5 \text{ in.}) = 625 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

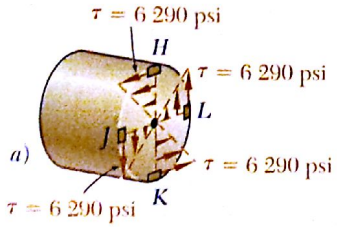
Las propiedades geométricas de la sección de 0.9 in. de diámetro son

$$A = \pi(0.45 \text{ in.})^2 = 0.636 \text{ in.}^2 \qquad I = \tfrac{1}{4}\pi(0.45 \text{ in.})^4 = 32.2 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$
$$J = \tfrac{1}{2}\pi(0.45 \text{ in.})^4 = 64.4 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$



Esfuerzos producidos por el par giratorio T. Usando la ecuación (3.8) se determinan los esfuerzos cortantes en los puntos H, J, K y L, y se ilustran en la figura *a*).

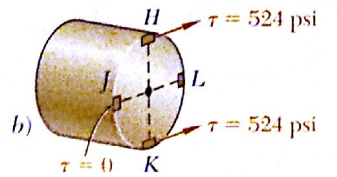
$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(900 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.45 \text{ in.})}{64.4 \times 10^{-3} \text{ in.}^4} = 6\,290 \text{ psi}$$



Esfuerzos producidos por la fuerza cortante V. La fuerza cortante **V** no produce esfuerzos cortantes en los puntos J y L. Primero se calcula Q para los puntos H y L para un semicírculo respecto de un diámetro vertical y después se calcula el esfuerzo cortante producido por la fuerza cortante $V = 250$ lb. Estos esfuerzos se muestran en la figura *b*).

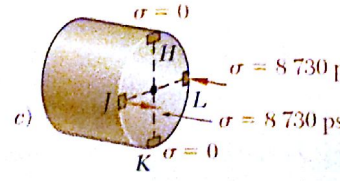
$$Q = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0.45 \text{ in.})^3 = 60.7 \times 10^{-3} \text{ in.}^3$$

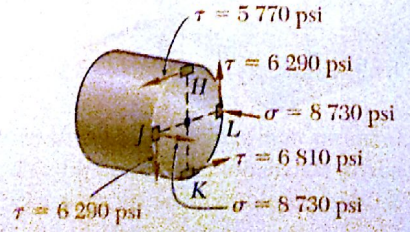
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(250 \text{ lb})(60.7 \times 10^{-3} \text{ in.}^3)}{(32.2 \times 10^{-3} \text{ in.}^4)(0.9 \text{ in.})} = 524 \text{ psi}$$



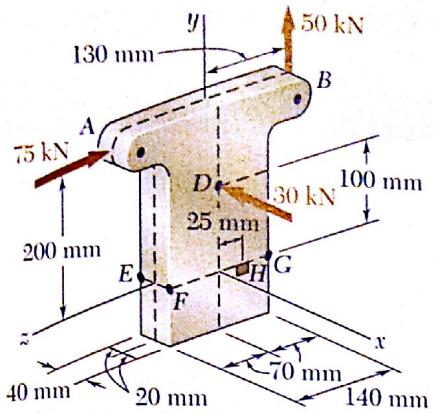
Esfuerzos producidos por el par flector M_y. Como el par flector M_y actúa en un plano horizontal, no produce esfuerzos en H y K. Con el uso de la ecuación (4.15) se determinan los esfuerzos normales en los puntos J y L y se ilustran en la figura *c*).

$$\sigma = \frac{|M_y|c}{I} = \frac{(625 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.45 \text{ in.})}{32.2 \times 10^{-3} \text{ in.}^4} = 8\,730 \text{ psi}$$





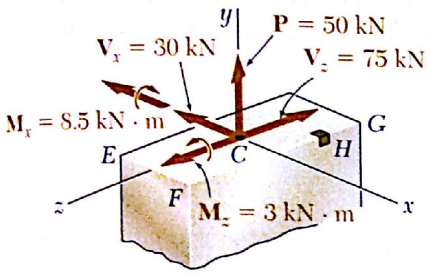
Resumen. Se suman los esfuerzos que se muestran y se obtienen los esfuerzos totales normal y cortante en los puntos H, J, K y L.



PROBLEMA MODELO 8.5

Se aplican tres fuerzas en los puntos *A*, *B* y *D* de un pequeño poste de acero, como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal horizontal del poste es un rectángulo de 40 × 140 mm, determine los esfuerzos y planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

SOLUCIÓN

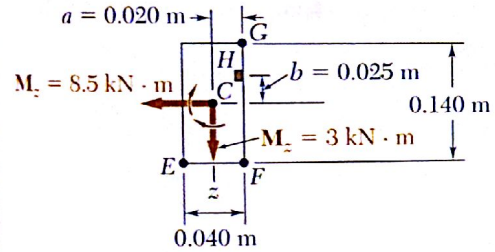


Fuerzas internas en la sección *EFG*. Se reemplaza a las tres fuerzas que se aplican por un sistema de par de fuerzas equivalente en el centro *C* de la sección rectangular *EFG*. Queda

$$V_x = -30\text{ kN} \quad P = 50\text{ kN} \quad V_z = -75\text{ kN}$$
$$M_x = (50\text{ kN})(0.130\text{ m}) - (75\text{ kN})(0.200\text{ m}) = -8.5\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_y = 0 \qquad M_z = (30\text{ kN})(0.100\text{ m}) = 3\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se observa que no existe un par giratorio respecto del eje *y*. Las propiedades geométricas de la sección rectangular son

$$A = (0.040\text{ m})(0.140\text{ m}) = 5.6 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$
$$I_x = \tfrac{1}{12}(0.040\text{ m})(0.140\text{ m})^3 = 9.15 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$
$$I_z = \tfrac{1}{12}(0.140\text{ m})(0.040\text{ m})^3 = 0.747 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

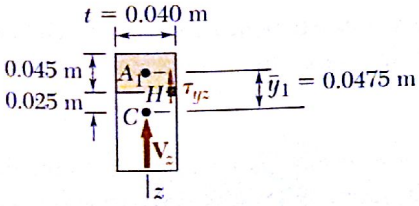


Esfuerzo normal en *H*. Se observa que los esfuerzos normales σ_y son producidos por la fuerza centrada **P** y los pares flectores $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$. Se determina el signo de cada esfuerzo por medio del examen cuidadoso del esquema del sistema de par de fuerzas en *C*.

$$\sigma_y = +\frac{P}{A} + \frac{|M_z|a}{I_z} - \frac{|M_x|b}{I_x}$$

$$= \frac{50\text{ kN}}{5.6 \times 10^{-3}\text{ m}^2} + \frac{(3\text{ kN}\cdot\text{m})(0.020\text{ m})}{0.747 \times 10^{-6}\text{ m}^4} - \frac{(8.5\text{ kN}\cdot\text{m})(0.025\text{ m})}{9.15 \times 10^{-6}\text{ m}^4}$$

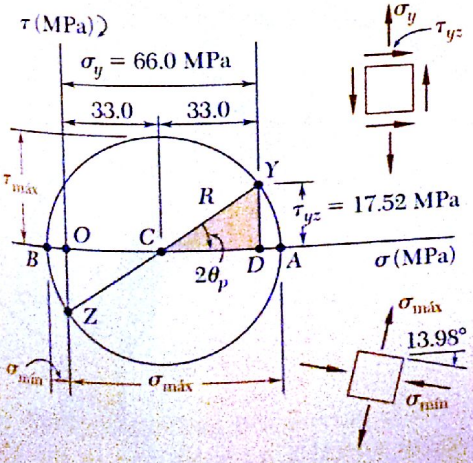
$$\sigma_y = 8.93\text{ MPa} + 80.3\text{ MPa} - 23.2\text{ MPa} \qquad \sigma_y = 66.0\text{ MPa} \triangleleft$$



Esfuerzo cortante en *H*. Al considerar la primera fuerza cortante $\mathbf{V}_x$, se observa que $Q = 0$ con respecto al eje *z*, debido a que *H* se encuentra sobre la arista de la sección transversal. Entonces, $\mathbf{V}_x$ no produce esfuerzo cortante en *H*. La fuerza cortante $\mathbf{V}_z$ sí produce un esfuerzo cortante en *H*, y se escribe

$$Q = A_1\bar{y}_1 = [(0.040\text{ m})(0.045\text{ m})](0.0475\text{ m}) = 85.5 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

$$\tau_{yz} = \frac{V_z Q}{I_x t} = \frac{(75\text{ kN})(85.5 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(9.15 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0.040\text{ m})} \qquad \tau_{yz} = 17.52\text{ MPa} \triangleleft$$



Esfuerzos principales, planos principales y esfuerzo cortante máximo en *H*. Se dibuja el círculo de Mohr para los esfuerzos en el punto *H*

$$\tan 2\theta_p = \frac{17.52}{33.0} \qquad 2\theta_p = 27.96° \qquad \theta_p = 13.98° \blacktriangleleft$$

$$R = \sqrt{(33.0)^2 + (17.52)^2} = 37.4\text{ MPa} \qquad \tau_{máx} = 37.4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{máx} = OA = OC + R = 33.0 + 37.4 \qquad \sigma_{máx} = 70.4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{mín} = OB = OC - R = 33.0 - 37.4 \qquad \sigma_{mín} = -7.4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

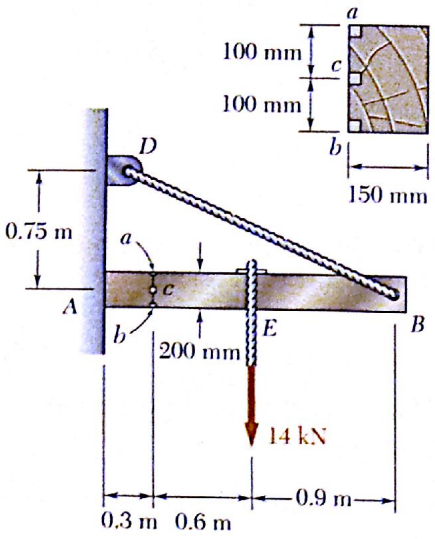


Figura P8.31

8.31 La viga en voladizo *AB* tiene una sección transversal rectangular de 150 × 200 mm. Si se sabe que la tensión en el cable *BD* es de 10.4 kN y se desprecia el peso de la viga, determine los esfuerzos normal y cortante en los tres puntos indicados.

8.32 Se aplican dos fuerzas de 1.2 kip a un elemento de máquina *AB* en forma de L, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

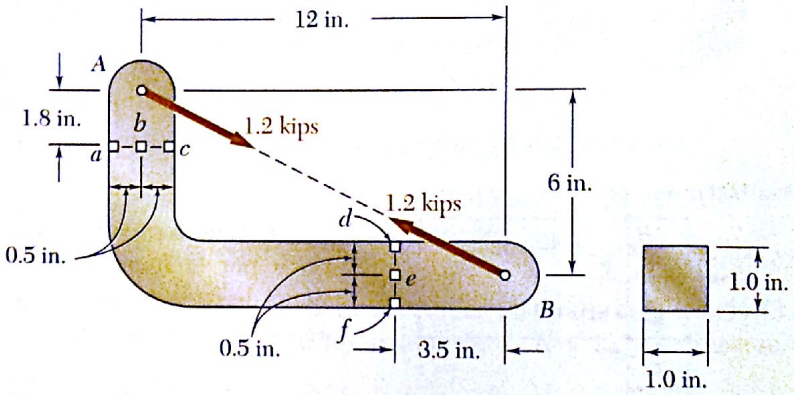


Figura P8.32 y P8.33

8.33 Se aplican dos fuerzas de 1.2 kip a un elemento de máquina *AB* en forma de L, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *d*, *b*) el punto *e*, *c*) el punto *f*.

8.34* a *8.36 El elemento *AB* tiene una sección transversal uniforme de 10 × 24 mm. Para la carga que se muestra en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

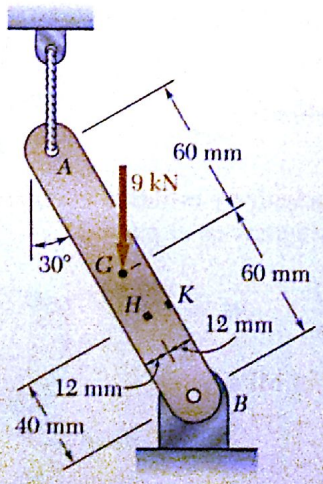


Figura *P8.34*

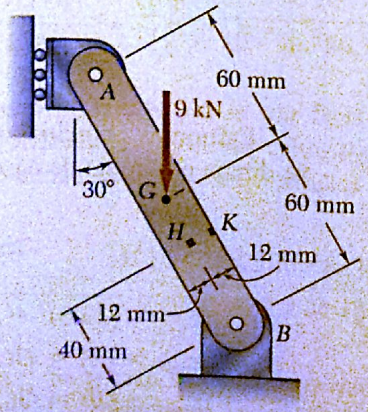


Figura P8.35

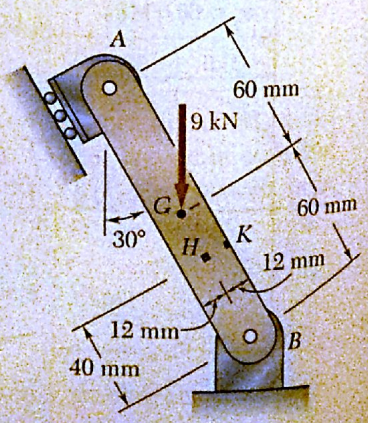


Figura *P8.36*

8.37 Sobre el eje de un camión pequeño actúan las fuerzas y el par que se ilustran. Si se sabe que el diámetro del eje es de 1.42 in., determine los esfuerzos normal y cortante en el punto H que se localiza encima del eje.

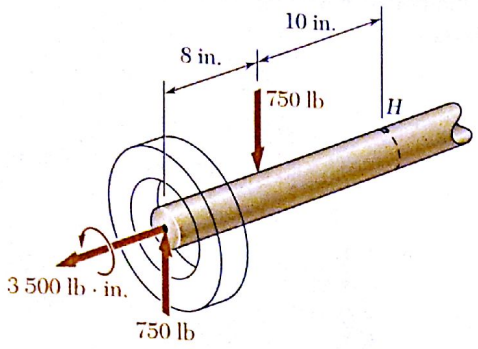


Figura P8.37

8.38 Una tira delgada se enrolla alrededor de una varilla sólida con radio c = 20 mm, como se muestra en la figura. Si se sabe que l = 100 mm y F = 5 kN, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto H, *b*) el punto K.

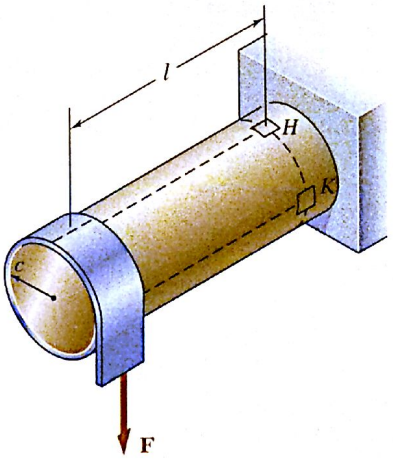


Figura P8.38

8.39 Sobre el ensamble de tubos que se muestra en la figura actúan varias fuerzas. Si cada sección de tubo tiene diámetros interior y exterior de 1.61 y 1.90 in., respectivamente, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto H, *b*) el punto K.

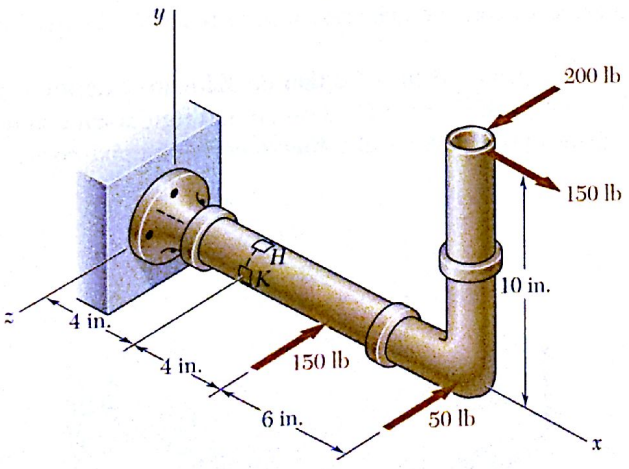


Figura *P8.39*

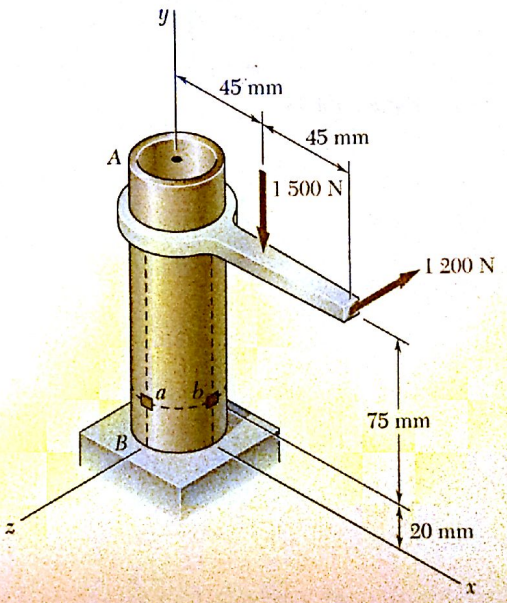


Figura P8.40

8.40 Se aplican dos fuerzas al tubo AB como se muestra en la figura. Si se sabe que el tubo tiene un diámetro interior de 35 mm y un diámetro exterior de 42 mm, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto a, *b*) el punto b.

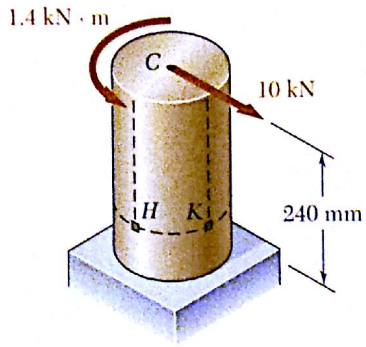


Figura P8.41

8.41 Se aplica una fuerza de 10 kN y un par de 1.4 kN · m en la parte superior del poste de hierro fundido de 65 mm de diámetro que se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el cortante máximo en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

8.42 Se aplican tres fuerzas a una placa de 4 in. de diámetro unida al eje sólido *AB* de 1.8 in. de diámetro, determine *a*) los esfuerzos y planos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

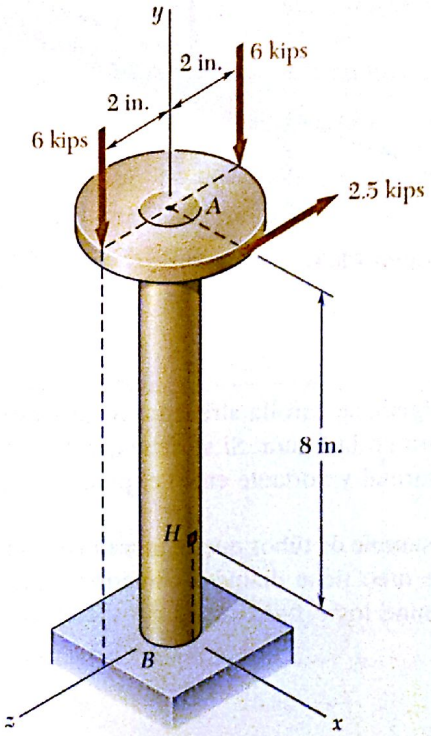


Figura P8.42

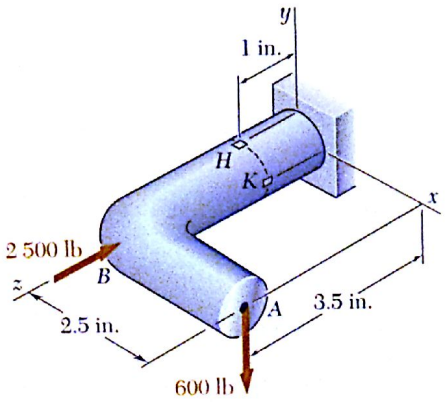


Figura *P8.43*

8.43 Se aplican fuerzas en los puntos *A* y *B* del soporte de hierro que se observa en la figura. Si el soporte tiene un diámetro de 0.8 in., determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en *a*) el punto *H*, *b*) en el punto *K*.

8.44 El tubo de acero *AB* tiene 72 mm de diámetro exterior y 5 mm de espesor de pared. Si se sabe que el brazo *CDE* está unido rígidamente al tubo, determine los esfuerzos y planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

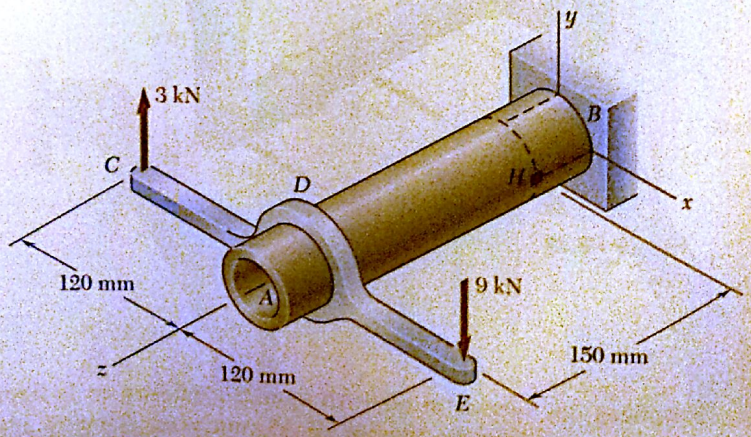


Figura P8.44

8.45 Se aplican tres fuerzas a la barra mostrada en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

8.46 Retome el problema 8.45, y ahora suponga que $h = 12$ in.

8.47 Se aplican tres fuerzas a la barra que se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

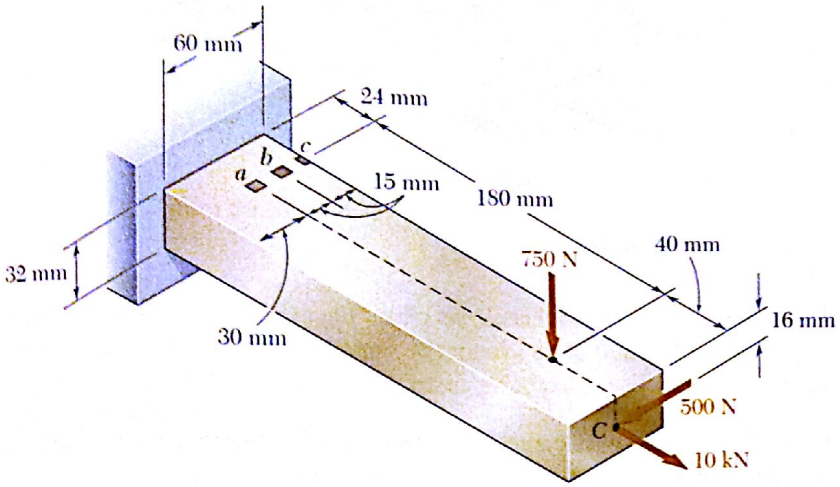


Figura P8.47

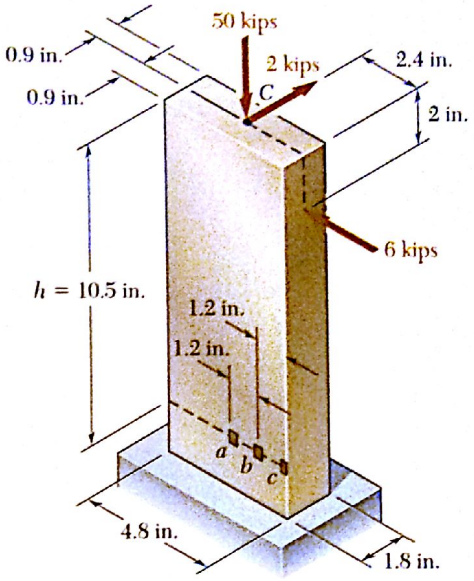


Figura *P8.45*

8.48 Retome el problema 8.47, y ahora suponga que la fuerza de 750 N se dirige verticalmente hacia arriba.

8.49 Se aplican tres fuerzas al elemento de máquina *ABD* como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal que contiene al punto *H* es un rectángulo de 20 × 40 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

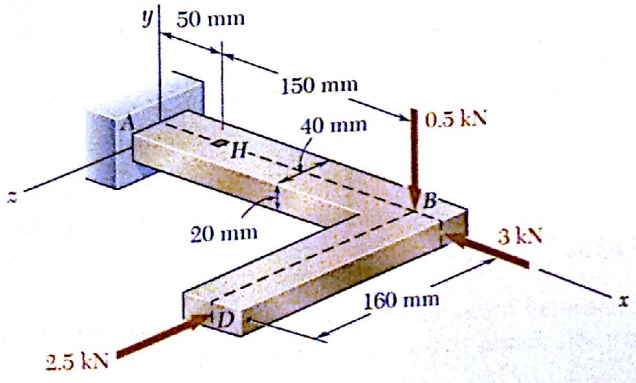


Figura P8.49

8.50 Retome el problema 8.49, y ahora suponga que la magnitud de la fuerza de 2.5 kN se incrementa a 10 kN.

8.51 Se aplican tres fuerzas sobre la viga en voladizo mostrada en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

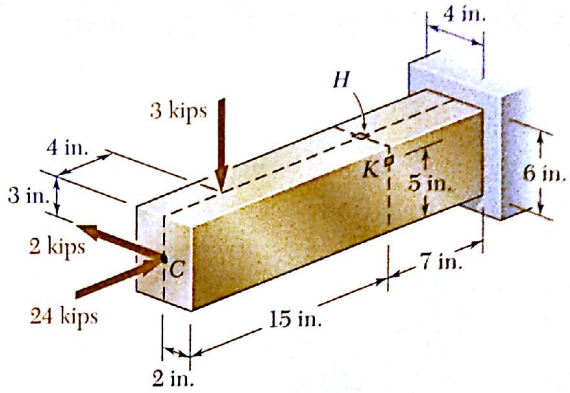


Figura *P8.51*

8.52 Para la viga y las cargas del problema 8.51, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

8.53 Tres placas, cada una de 13 mm de espesor, se sueldan para formar una viga en voladizo. Para las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos *a* y *b*.

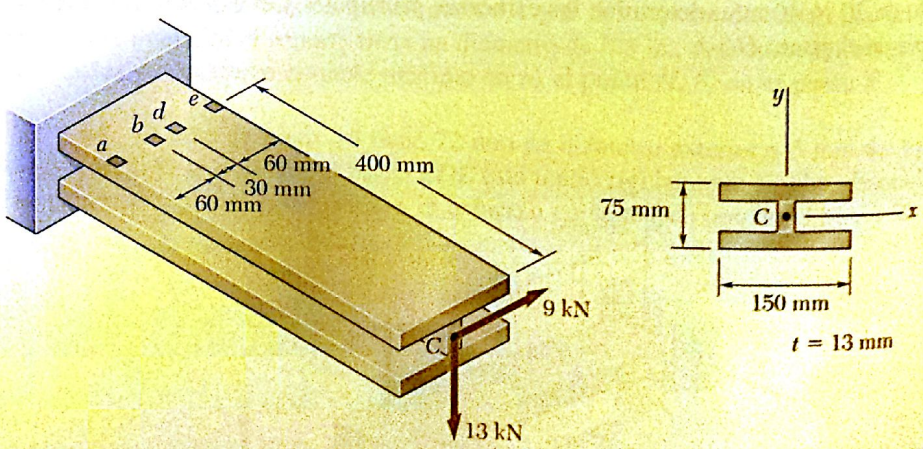


Figura P8.53 y *P8.54*

8.54 Tres placas de acero, cada una de 13 mm de espesor, se sueldan para formar una viga en voladizo. Para las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos *d* y *e*.

8.55 Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ en direcciones perpendiculares al eje longitudinal de una viga W12 × 40, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\mathbf{P}_1 = 5$ kips y $\mathbf{P}_2 = 3$ kips, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *a*.

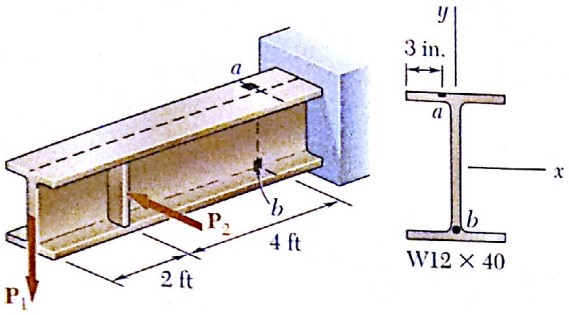


Figura P8.55 y P8.56

8.56 Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ en direcciones perpendiculares al eje longitudinal de una viga W12 × 40, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\mathbf{P}_1 = 5$ kips y $\mathbf{P}_2 = 3$ kips, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

8.57 Se aplican cuatro fuerzas a una viga de acero laminado W200 × 41.7, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante en el punto *a*.

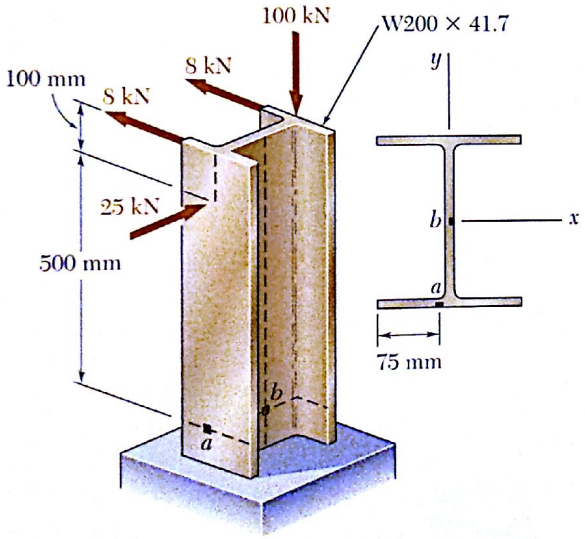


Figura P8.57 y *P8.58*

8.58 Se aplican cuatro fuerzas a una viga de acero laminado W200 × 41.7, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

8.59 Una fuerza **P** se aplica a una viga en voladizo por medio de un cable unido a un perno ubicado en el centro de su extremo libre. Si se sabe que **P** actúa en una dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga, determine *a*) el esfuerzo normal en el punto *a* en términos de *P*, *b*, *h*, *l* y β, *b*) los valores de β para los cuales el esfuerzo normal en *a* es cero.

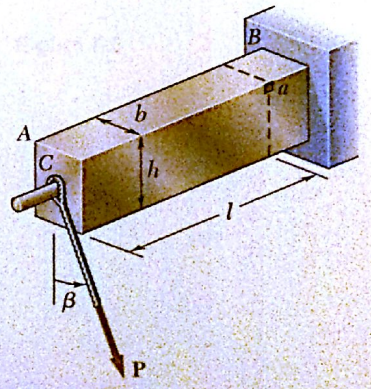


Figura *P8.59*

8.60 Se aplica una fuerza vertical **P** en el centro del extremo libre de una viga en voladizo *AB*. *a*) Si la viga se instala con el alma vertical ($\beta = 0$) y con su eje longitudinal *AB* en posición horizontal, determine la magnitud de la fuerza **P** para la cual el esfuerzo normal en el punto *a* es igual a +120 MPa. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que la viga se encuentra instalada con $\beta = 3°$.

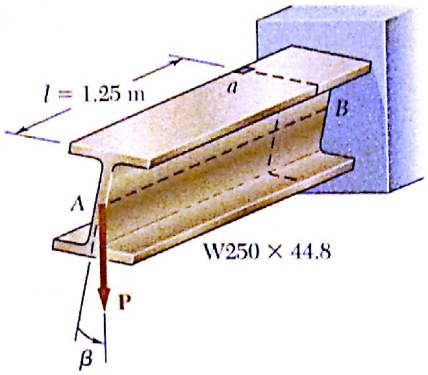


Figura P8.60

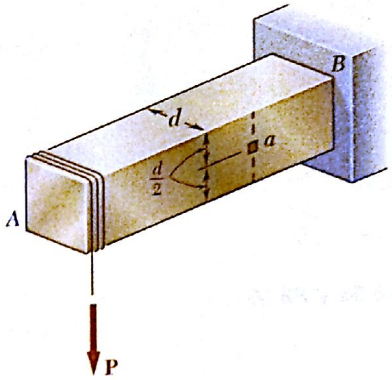


Figura *P8.61*

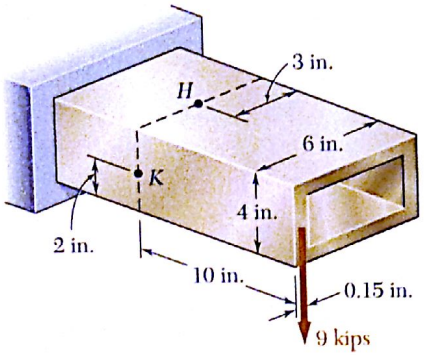


Figura P8.62

***8.61** Se aplica una fuerza **P** de 5 kN a un alambre enrollado alrededor de la barra *AB*, como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal de la barra es un cuadrado cuyos lados miden $d = 40$ mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *a*.

***8.62** Si el tubo estructural que se muestra en la figura tiene una pared con espesor uniforme de 0.3 in., determine los esfuerzos y planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

***8.63** El tubo estructural que se muestra en la figura tiene un espesor de pared uniforme de 0.3 in. Si se sabe que la carga de 15 kips se aplica 0.15 in. por encima de la base del tubo, determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

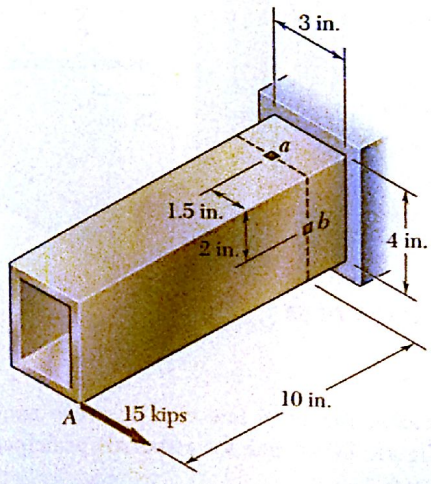


Figura *P8.63*

***8.64** Para el tubo y la carga del problema 8.63, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 8

En este capítulo se estudió el cálculo de los esfuerzos principales en vigas, ejes de transmisión y cuerpos de forma arbitraria sometidos a cargas combinadas.

Primero, en la sección 8.2 se recordaron las dos relaciones fundamentales deducidas en los capítulos 5 y 6 para el esfuerzo normal σ_x y el esfuerzo cortante τ_{xy} en cualquier punto dado de la sección transversal de una viga prismática,

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \qquad (8.1, 8.2)$$

donde V = cortante en la sección
M = momento flector en la sección
y = distancia del punto a la superficie neutral
I = momento de inercia centroidal de la sección transversal
Q = primer momento respecto del eje neutral de la parte de la sección transversal que se localiza arriba del punto dado
t = ancho de la sección cruzada en el punto dado

Usando uno de los métodos presentados en el capítulo 7 para la transformación de esfuerzos, fue posible obtener los planos y esfuerzos principales en el punto dado (figura 8.6).

Se investigó la distribución de los esfuerzos principales en una viga volada, angosta y rectangular sujeta a una carga **P** concentrada en su extremo libre, y se halló que en cualquier sección transversal, excepto en la vecindad del punto de aplicación de la carga, el máximo esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ no excedía al esfuerzo normal máximo σ_m que ocurre en la superficie de la viga.

Si bien esta conclusión sigue siendo válida para muchas vigas cuya sección transversal no es rectangular, no se cumple para vigas W o vigas S, en las que $\sigma_{máx}$ en las uniones b y d del perfil con las alas de la viga (figura 8.10) puede exceder el valor de σ_m que ocurre en los puntos a y e. Por lo anterior, el diseño de una viga de acero laminado debe incluir el cálculo del esfuerzo principal máximo en dichos puntos (véanse problemas modelo 8.1 y 8.2).

Planos y esfuerzos principales en una viga

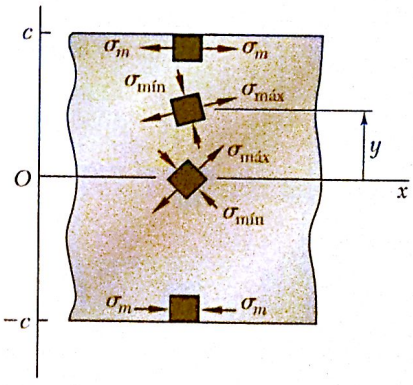


Figura 8.6

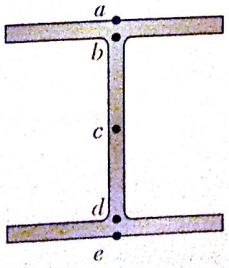


Figura 8.10

Diseño de ejes de transmisión bajo cargas transversales

En la sección 8.3 se consideró el diseño de *ejes de transmisión*, sometidos a *cargas transversales* así como a pares de torsión. Tomando en cuenta el efecto tanto de los esfuerzos normales debidos al momento flector M como de los esfuerzos cortantes debidos al par de torsión T, en cualquier sección transversal dada de un eje cilíndrico (sólido o hueco), se encontró que el valor mínimo permisible de la razón J/c de la sección transversal era

$$\frac{J}{C} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} \tag{8.6}$$

Esfuerzos bajo condiciones generales de carga

En los capítulos anteriores, se aprendió a determinar los esfuerzos en elementos prismáticos, ocasionados por cargas axiales (capítulos 1 y 2), torsión (capítulo 3), flexión (capítulo 4), y cargas transversales (capítulos 5 y 6). En la segunda parte de este capítulo (sección 8.4), se combinaron estos conocimientos para calcular los esfuerzos en condiciones más generales de carga.

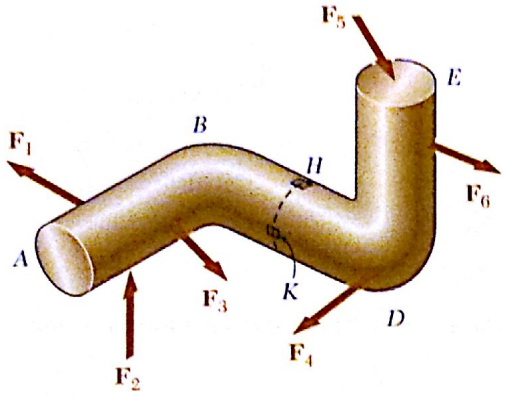


Figura 8.15

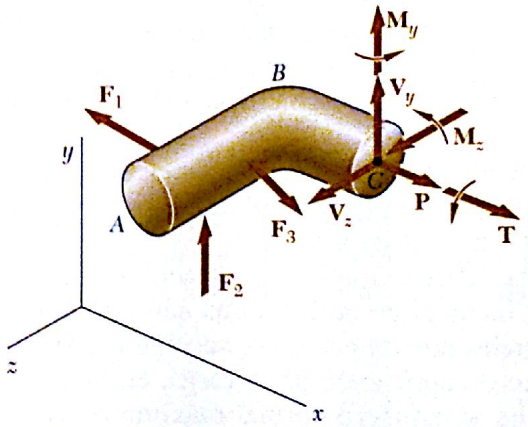


Figura 8.16

Por ejemplo, para determinar los esfuerzos en los puntos H o K del elemento doblado, como el que muestra la figura 8.15, se trazó una sección a través de dichos puntos y se reemplazó a las cargas aplicadas por un sistema equivalente de par de fuerzas en el centroide C de la sección (figura 8.16). Los esfuerzos normal y cortante que producen en H o K las fuerzas y pares ejercidos en C se calcularon y luego se combinaron para obtener los esfuerzos normal σ_x y cortante τ_{xy} resultantes y τ_{xz} en H o K. Finalmente, los esfuerzos principales, la orientación de los planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto H o en el K, se determinaron por alguno de los métodos presentados en el capítulo 7, a partir de los valores obtenidos de σ_x, τ_{xy} y τ_{xz}.

PROBLEMAS DE REPASO

8.65 *a*) Si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $\tau_{perm} = 14.5$ ksi, seleccione el perfil de patín ancho más económico que debe usarse para sostener la carga que se muestra en la figura. *b*) Determine los valores que se esperan de σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$ en la junta del alma con el patín de la viga seleccionada.

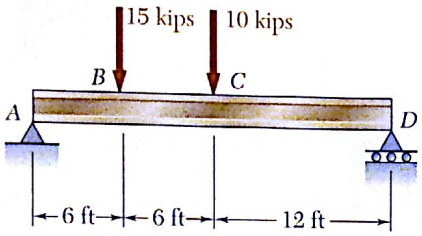


Figura P8.65

8.66 La fuerza vertical $\mathbf{P}_1$ y la fuerza horizontal $\mathbf{P}_2$ se aplican a los discos soldados al eje sólido AD, según se ilustra en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje es de 40 mm y que $\tau_{perm} = 55$ MPa, determine la magnitud máxima permisible de la fuerza $\mathbf{P}_2$.

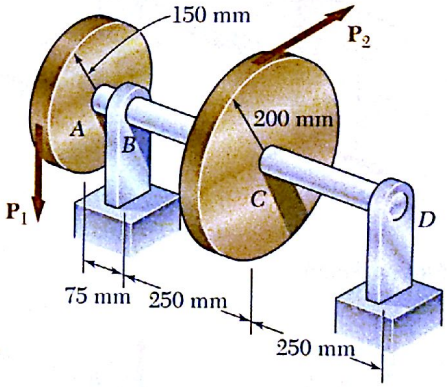


Figura *P8.66*

8.67 El eje sólido AB gira a 360 rpm y transmite 20 kW desde el motor M a los elementos de máquina conectados a los engranes E y F. Si $\tau_{perm} = 45$ MPa y se supone que se extraen 10 kW en cada engrane, determine el diámetro mínimo permisible para el eje AB.

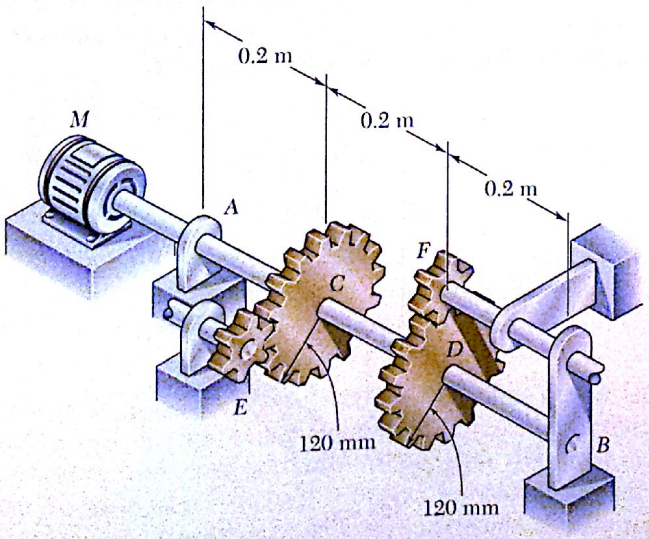


Figura P8.67

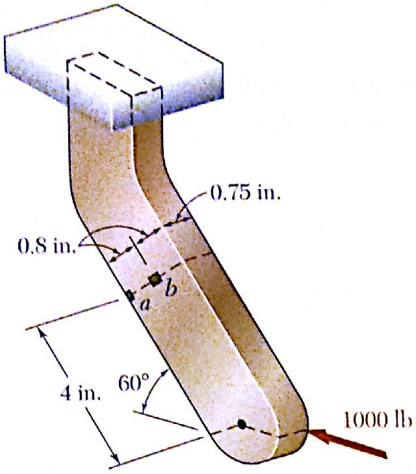
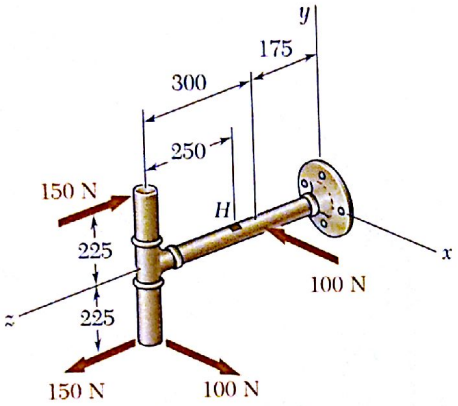


Figura *P8.68*



Dimensiones en mm

Figura *P8.70*

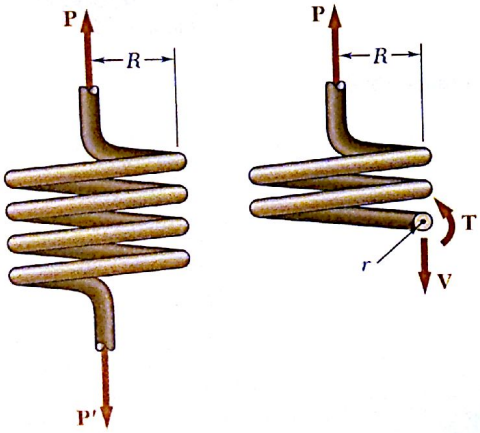


Figura P8.71

8.68 Para la ménsula y la carga que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

8.69 El anuncio que se muestra en la figura pesa 8 000 lb y lo sostiene un tubo estructural de 15 in. de diámetro exterior y 0.5 in. de espesor de pared. En un momento en que la presión resultante del viento es de 3 kips, localizada en el centro *C* del anuncio, determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *H*.

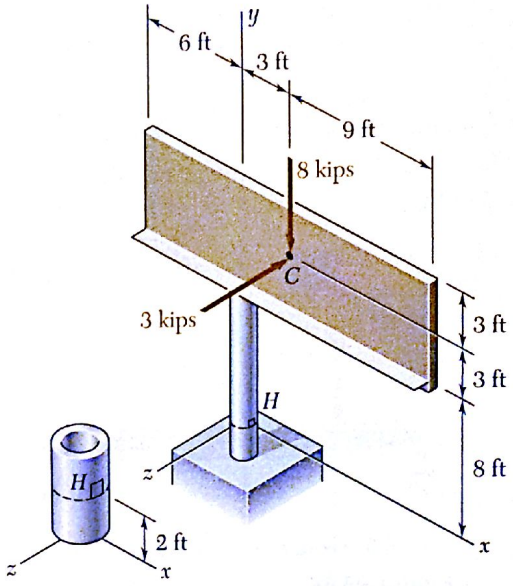


Figura P8.69

8.70 Sobre el ensamble de tubos que se muestra en la figura actúan varias fuerzas. Si se sabe que cada sección de tubo tiene diámetros interior y exterior de 36 y 42 mm, respectivamente, determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *H* que se localiza sobre la superficie exterior del tubo.

8.71 Un resorte en espiral cerrada está hecho con un alambre circular de radio *r* que a su vez forma una hélice de radio *R*. Determine el esfuerzo cortante máximo producido por las dos fuerzas iguales y opuestas **P** y **P′**. (*Sugerencia*: Primero determine el cortante **V** y el par de torsión **T** en una sección transversal cruzada.)

8.72 Se aplica una fuerza vertical **P** de 250 N de magnitud sobre el punto *A* de la manivela. Si se sabe que el eje *BDE* tiene un diámetro de 18 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*, localizado en la parte superior del eje, 50 mm a la derecha del apoyo *D*.

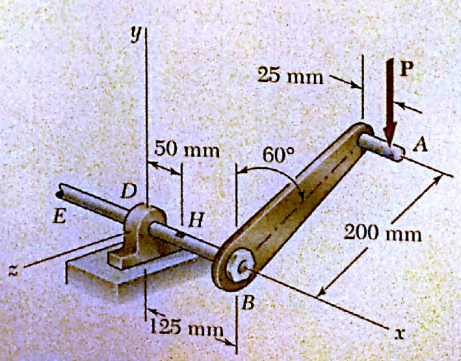


Figura P8.72

8.73 Se aplica una fuerza de 2.8 kips al poste de hierro fundido *ABD* de 2.4 in. de diámetro que se muestra en la figura. Determine, para el punto *H*, *a*) los esfuerzos y planos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

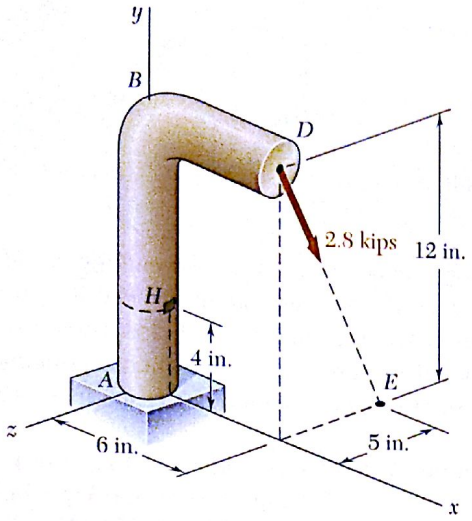


Figura *P8.73*

8.74 Para el poste y las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos principales, los planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

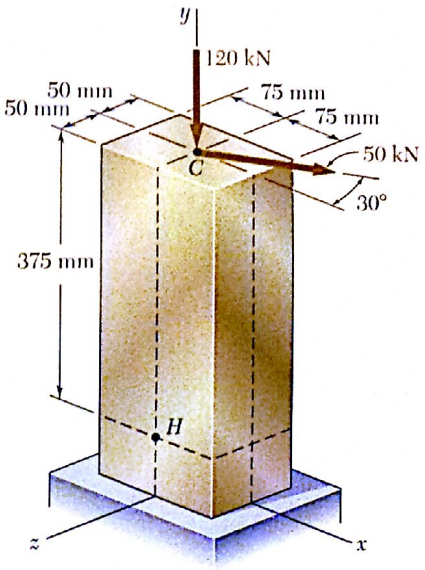


Figura P8.74

8.75 Si se sabe que el tubo estructural mostrado en la figura tiene una pared de espesor uniforme de 0.25 in., determine los esfuerzos normal y cortante en los tres puntos indicados.

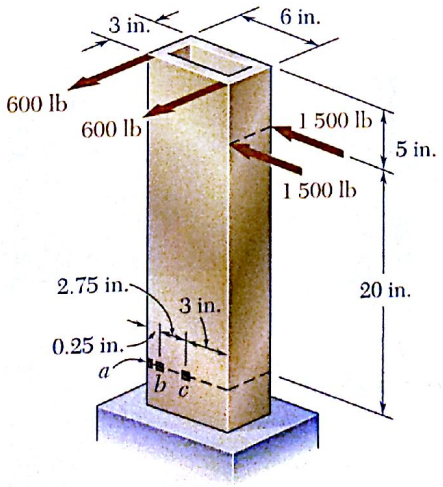


Figura P8.75

8.76 La viga en voladizo *AB* se instalará de manera que el lado de 60 mm forme un ángulo β entre 0 y 90° con la vertical. Si se sabe que la fuerza vertical de 600 kN se aplica en el centro del extremo libre de la viga, determine el esfuerzo normal en el punto *a* cuando *a*) $\beta = 0$, *b*) $\beta = 90°$. *c*) También determine el valor de β para el cual el esfuerzo en el punto *a* es máximo y encuentre el valor correspondiente de dicho esfuerzo.

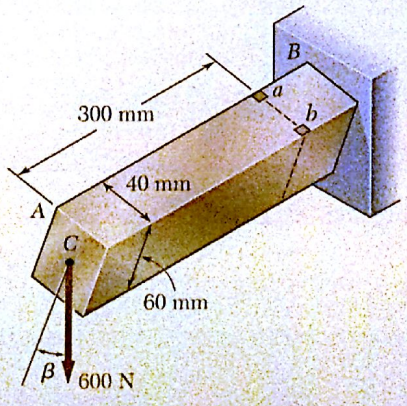


Figura P8.76